

Schaum

# RESISTENCIA DE MATERIALES

William A. Nash



Schaum

# RESISTENCIA DE MATERIALES

William A. Nash



**Mc  
Graw  
Hill**

## CAPITULO 1

# Tracción y compresión

### EFFECTOS INTERNOS DE LAS FUERZAS

En este libro trataremos principalmente de lo que podríamos llamar efectos *internos* de las fuerzas que actúan en un cuerpo. Ya no consideraremos a los cuerpos perfectamente rígidos como suponíamos en la estática, sino que uno de los principales objetivos de este estudio sobre la resistencia de materiales será el cálculo de las deformaciones de cuerpos de diversas formas bajo distintas cargas.

**BARRA CARGADA AXIALMENTE.** Probablemente, el caso más sencillo que se puede considerar para empezar es el de una barra metálica inicialmente recta, de sección constante, sometida en sus extremos a dos fuerzas colineales dirigidas en sentidos opuestos y que actúan en el centro de las secciones. Para que haya equilibrio estático, las magnitudes de las fuerzas deben ser iguales. Si están dirigidas en sentido de alejarse de la barra, se dice que ésta está sometida a *tracción*, mientras que si actúan hacia la barra, existe un estado de *compresión*. En la Fig. 1 están representados los dos casos. Bajo la acción de estas dos fuerzas aplicadas se originan otras fuerzas internas dentro de la barra, que pueden estudiarse imaginando un plano que la corte en un punto cualquiera y sea perpendicular a su eje longitudinal. En la Fig. 2a se designa este plano por *a-a*. Por razones que se estudiarán más tarde, el plano no deberá estar «demasiado cerca» de ninguno de los extremos de la barra. Si suponemos, para el estu-

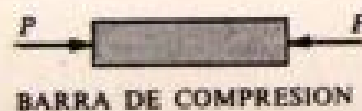
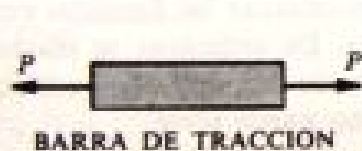


Fig. 1

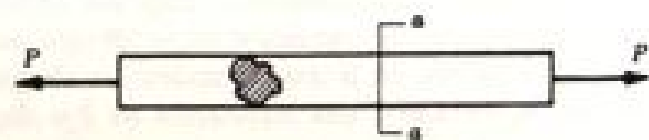


Fig. 2a



Fig. 2b

dio, que se quita la parte de barra situada a la derecha del plano, como en la Fig. 2b, deberá sustituirse por el efecto que ejerce sobre la parte izquierda. Por este procedimiento de considerar el corte por un plano, las fuerzas que eran internas originalmente se convierten en externas respecto a la parte de cuerpo que queda. Para que exista equilibrio en la parte de la izquierda, este «efecto» debe ser una fuerza horizontal de magnitud  $P$ , aunque esta fuerza que actúa normalmente a la sección *a-a* es, en realidad, la resultante de las fuerzas repartidas que actúan en dicha sección en sentido perpendicular a ella.

7. En la construcción de un edificio se usa un cable de acero de 6 mm de diámetro para la elevación de materiales. Si cuelgan verticalmente 150 m del cable para elevar en su extremo inferior una carga de 200 kg, determinar el alargamiento total del cable. El peso específico del acero es de  $0,0078 \text{ kg/cm}^3$  y  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . El alargamiento total es debido en parte a la fuerza aplicada de 200 kg y en parte al peso del cable. El debido a la carga es

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{(200)(15.000)}{\frac{\pi}{4}(0,6)^2(2,1 \cdot 10^6)} = 5 \text{ cm}$$

Por el Problema 6, el alargamiento debido al peso del cable es

$$\Delta_2 = \frac{WL}{2AE} = \frac{(\frac{\pi}{4}(0,6)^2)(15.000)(0,0078)(15.000)}{2(\frac{\pi}{4}(0,6)^2)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,4 \text{ cm}$$

Por consiguiente, el alargamiento total es  $\Delta = 5 + 0,4 = 5,4 \text{ cm}$ .

8. Un cable recto de aluminio de 30 m de largo está sometido a una tensión de tracción de 700 kg/cm<sup>2</sup>. Determinar el alargamiento total del cable. ¿Qué variación de temperatura produciría este mismo alargamiento? Tomar  $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha$  (coeficiente de dilatación lineal) =  $21,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .

$$\text{El alargamiento total está dado por } \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(700)(3.000)}{7 \cdot 10^5} = 3 \text{ cm.}$$

Un aumento de temperatura de  $\Delta T$  produciría la misma dilatación. Por tanto,

$$3 = (21,6 \cdot 10^{-6})(3.000)(\Delta T) \quad \text{y} \quad \Delta T = 46^\circ \text{C}$$

9. Dos barras prismáticas están unidas rigidamente y soportan una carga de 5.000 kg, como se ve en la figura. La barra superior es de acero con una densidad de  $0,0078 \text{ kg/cm}^3$ , una longitud de 10 m y una sección de  $60 \text{ cm}^2$ . La inferior es de bronce con densidad  $0,008 \text{ kg/cm}^3$ , una longitud de 6 m y una sección de  $50 \text{ cm}^2$ . Para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , y para el bronce  $E = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar las tensiones máximas en cada material.

La tensión máxima en el bronce tiene lugar inmediatamente bajo la unión en B-B. Allí, la tensión normal vertical es debida al efecto combinado de la carga de 5.000 kg y del peso de toda la barra de bronce situada bajo B-B.

El peso de la barra de bronce es

$$W_b = (600)(50)(0,008) = 240 \text{ kg}$$

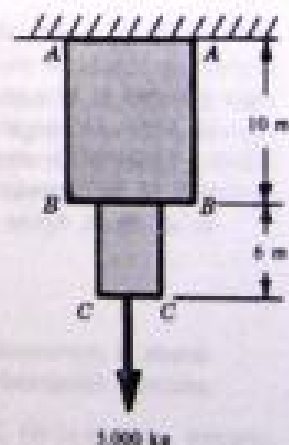
$$\text{La tensión en esta sección es } \sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240}{50} = 105 \text{ kg/cm}^2.$$

La tensión máxima en la barra de acero se produce en la sección A-A de suspensión porque en ella producen tensión normal todo el peso de las barras de acero y de bronce, mientras que en cualquier sección situada más abajo solo actuaría una parte del peso de la barra de acero.

El peso de la barra de acero es

$$W_a = (1.000)(60)(0,0078) = 468 \text{ kg}$$

$$\text{La tensión en la sección A-A es } \sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240 + 468}{60} = 95 \text{ kg/cm}^2.$$



10. Una barra troncocónica maciza de sección circular varía uniformemente entre un diámetro menor  $d$  y uno mayor  $D$ , con longitud  $L$ . Determinar el alargamiento debido a una fuerza axial  $P$  aplicada en cada extremo. Véase la Figura (a).

La coordenada  $x$  indica la distancia de un elemento en forma de disco de espesor  $dx$  al extremo menor. Por triángulos semejantes se halla fácilmente para radio de este elemento

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left( \frac{D-d}{2} \right)$$

El alargamiento del elemento discoidal se puede hallar aplicando la fórmula para la carga axial,  $\Delta = PL/AE$ . Para el elemento, esta expresión se convierte en

$$d\Delta = \frac{P dx}{\pi \left[ \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left( \frac{D-d}{2} \right) \right]^2 E}$$

El alargamiento de toda la barra se obtiene sumando los de todos los elementos a lo largo de la misma, lo que se consigue integrando. Si expresamos por  $\Delta$  el alargamiento de toda la barra,

$$\Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{4P dx}{\pi \left[ d + \frac{x}{L} (D-d) \right]^2 E} = \frac{4PL}{\pi D d E}$$

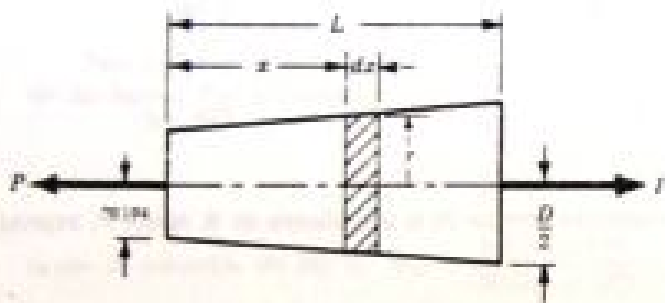


Fig. (a) Prob. 10

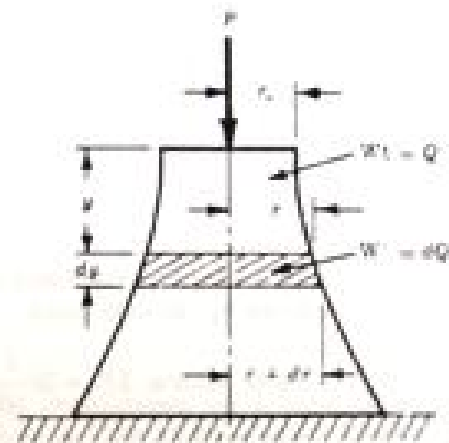


Fig. (b) Prob. 11

11. Un cuerpo con forma de sólido de revolución soporta una carga  $P$ , como se ve en la Fig. (b). El radio de la base superior es  $r_0$  y el peso específico del material es  $\gamma$  kg/m<sup>3</sup>. Determinar cómo debe variar el radio con la altura para que la tensión de compresión sea constante en todas las secciones. El peso del sólido no es despreciable.

Supongamos que se mide  $y$  desde la base superior, como se indica en la figura, y representemos por  $Q$  el peso de la parte del cuerpo de altura  $y$ . Así,  $dQ$  representa el incremento de  $Q$  en el incremento de altura  $dy$ . Sean  $r$  y  $(r + dr)$  los radios de las superficies superior e inferior, respectivamente, de este elemento horizontal y  $A$  y  $(A + dA)$  las áreas correspondientes. Considerando las tensiones de compresión normales que actúan sobre las dos caras de este elemento, tenemos

$$\frac{P + Q}{A} = \frac{P + Q + dQ}{A + dA} = \sigma = \text{constante}$$

de donde

$$(1) \quad \frac{dA}{dQ} = \frac{A}{P + Q} = \frac{1}{\sigma}$$

El incremento de área entre las caras superior e inferior del elemento es

$$dA = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr$$

El incremento de peso es  $dQ = \pi r^2 \gamma dy$ .

Por consiguiente, de (1),  $\frac{2\pi r^2 dr}{\pi r^2 y (dy)} = \frac{1}{\sigma}$  e integrando,  $2 \log r = \left(\frac{1}{\sigma}\right)y + C_1$ .

Aplicando la condición en el límite,  $r = r_0$  cuando  $y = 0$ , hallamos  $C_1 = 2 \log r_0$ .

Del mismo modo, de las condiciones en la base superior,  $\sigma = \frac{P}{\pi r_0^2}$  y finalmente,  $r = r_0 e^{\left(\frac{y \pi r_0^2 P}{2P}\right)}$ .

12. Dos barras de acero idénticas están unidas por medio de un pasador y soportan una carga de 50.000 kg, como se muestra en la Fig. (a). Hallar la sección de las barras necesaria para que la tensión normal en ellas no sea mayor de 2.100 kg/cm<sup>2</sup>. Hallar también el desplazamiento vertical del punto B. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

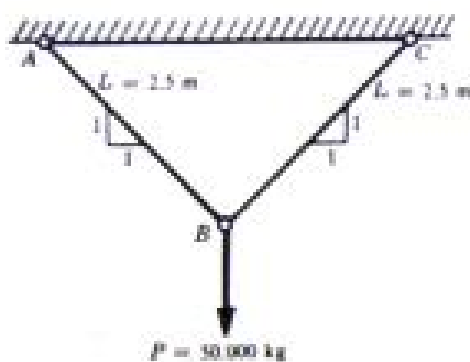


Fig. (a)

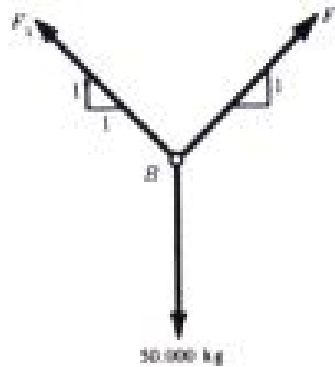


Fig. (b)

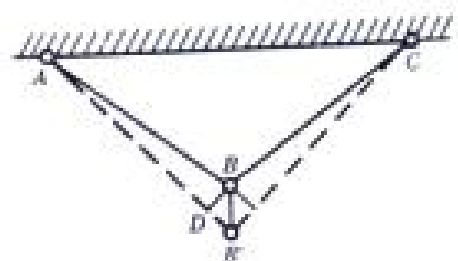


Fig. (c)

En la Fig. (b) se representa un diagrama de cuerpo en libertad de la articulación de B, donde  $F_1$  expresa la fuerza (en kg) en cada barra.

$$\text{De la estática, } \Sigma F_y = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F_1 - 50.000 = 0 \quad \text{o} \quad F_1 = 35.355 \text{ kg.}$$

$$\text{Por tanto, la sección buscada es } A = \frac{35.355}{2.100} = 17 \text{ cm}^2.$$

Como nuestro estudio de resistencia de materiales se limita a deformaciones pequeñas, el aspecto geométrico de la figura no ha variado sensiblemente, por lo que podemos representar la posición de las barras deformadas por las líneas de trazos de la Fig. (c), y el ángulo  $DB'B$  es prácticamente de 45°. El alargamiento de la barra izquierda está representado por  $DB'$  y, por la expresión del alargamiento axial, se halla que es

$$DB' = \frac{(35.355)(250)}{(17)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,25 \text{ cm} \quad \text{y, por tanto, } BB' = \frac{0,25}{\cos 45^\circ} = 0,35 \text{ cm}$$

13. Las dos barras de acero  $AB$  y  $BC$  están articuladas en cada extremo y soportan la carga de 30.000 kg representada en la Fig. (a) siguiente. El metal es acero recocido, con un límite elástico convencional de 4.200 kg/cm<sup>2</sup>. Son aceptables los coeficientes de seguridad de 2 para los elementos a tracción y 3,5 para los de compresión. Determinar las secciones necesarias de las barras, así como las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del punto B. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

En la Fig. (b) aparece un diagrama del nudo B como cuerpo en libertad, si se supone que las fuerzas desconocidas son tracciones.

$$\begin{aligned} \text{De la estática: } \Sigma F_y = -30.000 - BC \sin 30^\circ = 0 & \quad \text{o} \quad BC = -60.000 \text{ kg} \\ \Sigma F_x = -BA - BC \cos 30^\circ = 0 & \quad \text{o} \quad BA = 52.000 \text{ kg} \end{aligned}$$

Las tensiones de trabajo vienen dadas por  $\frac{4.200}{0,2} = 2.100 \text{ kg/cm}^2$  para tracción

y  $\frac{4.200}{3,5} = 1.200 \text{ kg/cm}^2$  para compresión.

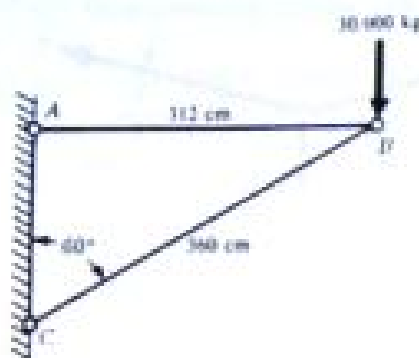


Fig. (a)

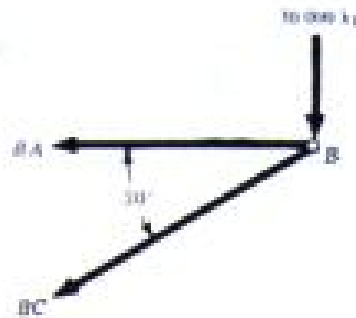


Fig. (b)

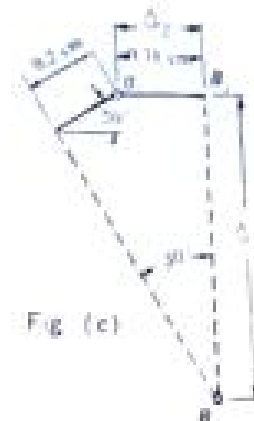


Fig. (c)

Las secciones necesarias se hallan dividiendo la fuerza axial en cada barra por la tensión de trabajo admisible. En consecuencia,

$$A_{AB} = \frac{52.000}{2.100} = 24,7 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_{BC} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2$$

Para hallar el desplazamiento del punto B es necesario primero calcular la deformación axial de cada una de las barras. Por la expresión deducida en el Problema 1 hallamos que el alargamiento de AB es

$$\Delta_{AB} = \frac{(52.000)(312)}{(24,7)(2,1 \times 10^6)} = 0,31 \text{ cm}$$

y que la reducción de BC es  $\Delta_{BC} = \frac{(60.000)(360)}{(50)(2,1 \times 10^6)} = 0,2 \text{ cm}$ .

Puede determinarse la posición del punto B después de la deformación, comprobando que la barra AB se alarga 0,31 cm y gira como un cuerpo rígido alrededor de la articulación en A, y que la BC se acorta 0,2 cm y gira también alrededor de la articulación en C.

La Fig. (c) representa el movimiento del punto B hasta su posición deformada B'. Hay que hacer notar que la deformación de la estructura es pequeña, por lo que puede representarse el desplazamiento debido al giro alrededor de A, de la barra AB alargada, por la recta B<sub>1</sub>B' en lugar del arco de círculo con centro en A, y lo mismo puede decirse respecto al giro de la barra BC. Considerando el esquema de más arriba vemos inmediatamente que las componentes del desplazamiento del punto B son

$$\Delta_y = 0,31 \text{ cm}$$

$$\Delta_x = \left[ \frac{(0,2 \cos 30^\circ) + 0,31}{\text{tg } 30^\circ} \right] + 0,2 \text{ sen } 30^\circ = 0,85 \text{ cm}$$

14. Considerar dos varillas delgadas o alambres, como las representadas en la Fig. (a) siguiente, que están articuladas en A, B y C y son inicialmente horizontales y de longitud L cuando no hay aplicada ninguna carga. El peso de las varillas es despreciable. Si se aplica (gradualmente) una fuerza Q en el punto B, determinar la magnitud de Q para producir una deformación vertical fijada  $\delta$  del punto B.

Es un ejemplo muy interesante de sistema en el cual el alargamiento de cada uno de sus elementos satisface la ley de Hooke, a pesar de lo cual, por razones geométricas, la deformación no es proporcional a la fuerza.

Para cada barra es cierta la relación

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

dónde  $P$  es la fuerza axial en la barra y  $\delta$  el alargamiento axial. Inicialmente, cada barra tiene longitud  $L$  y después de que se ha aplicado toda la carga, la longitud es  $L'$ . Por tanto,

$$(1) \quad L' - L = \frac{PL}{AE}$$

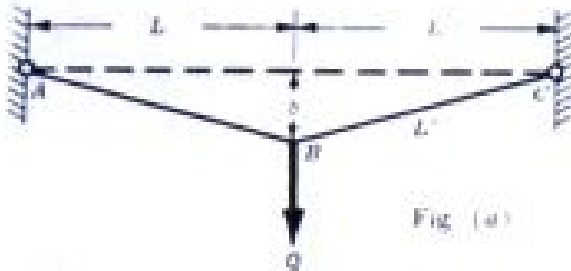


Fig. (a)



Fig. (b)

En la Fig. (b) se muestra el diagrama de cuerpo en libertad de la articulación B. Por la estática,

$$\Sigma F_v = 2P \operatorname{sen} \alpha - Q = 0 \quad \text{o} \quad Q = 2P \left( \frac{\delta}{L'} \right)$$

$$(2) \text{ Teniendo en cuenta (1)} \quad Q = 2 \left[ \frac{(L' - L)AE}{L} \right] \frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L} \left( 1 - \frac{L}{L'} \right)$$

(3) Pero

$$(L')^2 = L^2 + \delta^2$$

$$(4) \text{ Por consiguiente,} \quad Q = \frac{2\delta AE}{L} \left[ 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} \right]$$

Y, por la fórmula del binomio, tenemos

$$(5) \quad \sqrt{L^2 + \delta^2} = L \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{L^2}} = L \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} + \dots \right] \quad \text{y, por tanto,}$$

$$(6) \quad 1 - \frac{L}{L \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right]} \approx 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{L^2}$$

De aquí tenemos la fórmula aproximada que relaciona fuerza y desplazamiento,

$$(7) \quad Q = \frac{2AE\delta}{L} \left( \frac{\delta^2}{2L^2} \right) = \frac{AE\delta^3}{L^3} \quad \text{que corresponde a la ecuación (4).}$$

Así, pues, el desplazamiento no es proporcional a la fuerza  $Q$ , aunque se cumpla la ley de Hooke para cada barra individualmente. Hay que observar que  $Q$  es más aproximadamente proporcional a  $\delta$  cuando ésta se hace mayor, suponiendo que se siga cumpliendo la ley de Hooke para el alargamiento de las barras. En este ejemplo no se cumple la superposición. La característica de este sistema es que la acción de las fuerzas exteriores resulta sensiblemente afectada por las pequeñas deformaciones que se producen. En este caso, las tensiones y los desplazamientos no son funciones lineales de las cargas aplicadas y la superposición no es válida.

**RESUMEN.** Si hay que aplicar la superposición, el material debe obedecer la ley de Hooke; pero esta condición no es suficiente, sino que debemos comprobar si la acción de las cargas aplicadas resulta afectada por las pequeñas deformaciones de la estructura. Si el efecto es considerable, no es válida la superposición.

15. Para el sistema estudiado en el Problema 14, consideremos cables con una longitud inicial de 150 cm, sección de  $0,6 \text{ cm}^2$  y con  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar, para una carga  $Q$  de 10 kg, la deformación en el centro  $\delta$  por las relaciones exacta y aproximada dadas anteriormente.



La expresión exacta que relaciona la fuerza y la deformación es  $Q = \frac{2\delta AE}{L} \left[ 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} \right]$

Sustituyendo los valores numéricos,  $10 = \frac{2(0,6)(2,1 \cdot 10^6)}{(150)} \left[ 1 - \frac{150}{\sqrt{(150)^2 + \delta^2}} \right]$

Despejando por tanteos hallamos  $\delta = 2,984$  cm.

La relación aproximada entre fuerza y deformación es  $Q = \frac{AE\delta^3}{L^3}$

Sustituyendo valores,  $10 = \frac{(0,6)(2,1 \cdot 10^6) \delta^3}{(150)^3}$ , de donde  $\delta = 2,992$  cm.

16. Una barra de acero cuadrada de 5 cm de lado y longitud un metro está sometida a una fuerza de tracción axial de 32.000 kg. Determinar la disminución de la dimensión lateral debida a esta carga. Considerar  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> y  $\mu = 0,3$ .

La carga es axial, por lo cual la tensión en la dirección de la misma está dada por

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{32.000}{25} = 1.280 \text{ kg/cm}^2$$

La expresión sencilla de la ley de Hooke para las cargas uniaxiales dice que  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

La deformación  $\epsilon$  en la dirección de la carga es, por tanto,  $\frac{1.280}{2.100.000} = 0,00061$ .

La relación entre las deformaciones lateral y axial se llama relación de Poisson, es decir,

$$\mu = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

Se ha hallado que la deformación axial es 0,00061, por lo que la lateral será igual a  $\mu$  veces este valor, o sea,

$$(0,3)(0,00061) = 0,000183$$

Como la deformación lateral unitaria es 0,000183, la variación en una longitud de 5 cm es de 0,000915 cm, que representa la disminución de la dimensión lateral de la barra.

Hay que hacer notar que la definición de relación de Poisson, como cociente entre dos deformaciones, presupone que solo actúa en el elemento una carga uniaxial.

17. Consideremos un estado de tensiones en un elemento, tal que se ejerce una tensión  $\sigma_x$  en una dirección, puede producirse contracción lateral libremente en otra dirección ( $z$ ), pero está totalmente impedida en la tercera ( $y$ ). Hallar la relación de la tensión en la dirección  $x$  a la deformación en la misma. Hallar, además, la relación entre la deformación en la dirección  $z$  y la de la dirección  $x$ .

Examinemos el enunciado general de la ley de Hooke estudiado anteriormente. Si, en las ecuaciones, ponemos  $\sigma_y = 0$ ,  $\epsilon_y = 0$  para satisfacer las condiciones del problema, la ley se convierte en

$$(a) \quad \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_x + 0)]$$

$$(b) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_x + 0)] = 0$$

$$(c) \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [0 - \mu(\sigma_x + \sigma_x)]$$

De (b),

$$\sigma_x = \mu\sigma_x$$

Y, en consecuencia, de (a)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu^2\sigma_x] = \frac{(1 - \mu^2)}{E} \sigma_x$$

Despejando  $\epsilon_x$  de esta ecuación en función de  $\epsilon_y$  y sustituyendo en (c), tenemos

$$\epsilon_x = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \mu\sigma_x) = -\frac{\mu(1+\mu)}{E} \frac{\epsilon_x E}{(1-\mu^2)} = -\frac{\mu\epsilon_x}{(1-\mu)}$$

Y podemos hallar las relaciones  $\frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{E}{1-\mu^2}$  y  $-\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\mu}{1-\mu}$

A la primera cantidad,  $E/(1-\mu^2)$ , se le llama a veces *módulo de elasticidad efectivo* y se utiliza en la teoría de placas y láminas. A la segunda relación,  $\mu/(1-\mu)$ , se le llama *valor efectivo de la relación de Poisson*.

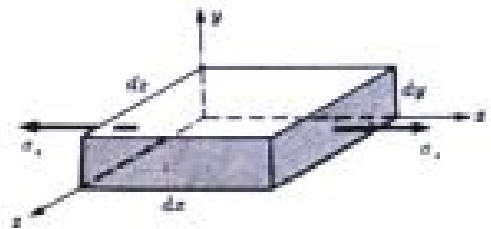
18. Considerar un bloque elemental sometido a una tracción uniaxial. Deducir expresiones aproximadas para la variación de volumen por unidad, debido a esta carga.

Podemos representar la deformación en la dirección de las fuerzas por  $\epsilon_x$ , por lo que en las otras dos direcciones ortogonales valdrán  $(-\mu\epsilon_x)$ . Por consiguiente, si las dimensiones primitivas del elemento son  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , las finales serán

$$(1 + \epsilon_x)dx, (1 - \mu\epsilon_x)dy, (1 - \mu\epsilon_x)dz$$

y el volumen después de la deformación:

$$\begin{aligned} V &= [(1 + \epsilon_x)dx][(1 - \mu\epsilon_x)dy][(1 - \mu\epsilon_x)dz] \\ &= (1 + \epsilon_x)(1 - 2\mu\epsilon_x)dy dz \\ &= (1 - 2\mu\epsilon_x + \epsilon_x)dy dz \end{aligned}$$



pues las deformaciones son tan pequeñas que los cuadrados y los productos de ellas son despreciables. Como el volumen inicial era  $dx dy dz$ , la variación unitaria de volumen es

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu\epsilon_x)$$

Por tanto, para una fuerza de tracción el volumen aumenta ligeramente, y para una compresión disminuye.

Además, el área de la sección transversal del elemento en un plano normal a la dirección de la fuerza aplicada está dada aproximadamente por

$$A = (1 - \mu\epsilon_x)^2 dy dz = (1 - 2\mu\epsilon_x)dy dz$$

19. Una barra cuadrada de aluminio de 5 cm de lado y 25 cm de longitud, está sometida a cargas axiales de tracción en sus extremos. Se ha hallado experimentalmente que la deformación en la dirección de la carga es 0.001 cm/cm. Determinar el volumen de la barra cuando actúa la carga. Considerar  $\mu = 0.33$ .

Por el Problema 18, la variación unitaria de volumen es

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\mu) = 0.001(1 - 0.66) = 0.00034$$

Por consiguiente, la variación de volumen en toda la barra es<sup>2</sup>

$$\Delta V = (5 \times 5 \times 25)(0.00034) = 0.212 \text{ cm}^3$$

El volumen primitivo de la barra sin tensión es de 625 cm<sup>3</sup>. Como una fuerza de tracción aumenta el volumen, el final bajo la carga es 625.212 cm<sup>3</sup>. Hay que observar que los métodos ordinarios de medida no darían tantas cifras exactas.

20. Ya hemos dado la forma general tridimensional de la ley de Hooke, en la que las componentes de la deformación están expresadas en función de las componentes de la tensión. A veces es necesario expresar las componentes de la tensión en función de las de la deformación. Deduzcamos estas expresiones.

Dadas las expresiones previas

$$(1) \quad \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$(2) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$(3) \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

introducamos la notación

$$(4) \quad e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$(5) \quad \theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Con esta notación se pueden resolver fácilmente las ecuaciones (1), (2) y (3) por determinantes, despejando  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , obteniéndose

$$(6) \quad \sigma_x = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} e + \frac{E}{(1 + \mu)} \epsilon_x$$

$$(7) \quad \sigma_y = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} e + \frac{E}{(1 + \mu)} \epsilon_y$$

$$(8) \quad \sigma_z = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} e + \frac{E}{(1 + \mu)} \epsilon_z$$

que son las expresiones buscadas.

Podemos sacar todavía más consecuencias de las ecuaciones (1) a (5). Si se suman las (1), (2) y (3), introduciendo los símbolos  $e$  y  $\theta$ , tenemos

$$(9) \quad e = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)\theta$$

Para el caso particular de un sólido sometido a presión hidrostática uniforme  $p$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ , por lo que

$$e = \frac{-3(1 - 2\mu)p}{E} \quad \text{o} \quad \frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

A la cantidad  $\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$  se le representa a veces por  $K$  y se designa por *módulo de volumen* o *módulo de dilatación de volumen* del material. Físicamente,  $K$  es una medida de la resistencia de un material a cambiar de volumen, sin variación de forma.

Vemos que el volumen final de un elemento de lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , antes de la carga y sometido a deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ , es

$$(1 + \epsilon_x)dx (1 + \epsilon_y)dy (1 + \epsilon_z)dz = (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)dx dy dz$$

por lo que la relación del incremento de volumen al volumen inicial está dada aproximadamente por

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Esta variación por unidad de volumen ( $e$ ) se conoce por *dilatación*.

**DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS RESISTENTES.** Llegados a este punto, es necesario hacer alguna hipótesis sobre el modo en que varían estas fuerzas repartidas, y como la fuerza aplicada  $P$  actúa en el centro, se suele admitir que son uniformes en toda la sección. Esta distribución probablemente no se dará nunca exactamente, a consecuencia de la orientación caprichosa de los granos cristalinos de que está compuesta la barra: el valor exacto de la fuerza que actúa en cada elemento de la sección transversal es función de la naturaleza y la orientación de la estructura cristalina en ese punto, pero para el conjunto de la sección la hipótesis de una distribución uniforme da una exactitud aceptable desde el punto de vista de la ingeniería.

**TENSION NORMAL.** En lugar de hablar de la fuerza interna que actúa sobre un elemento de superficie, probablemente es más significativo y más útil para la comparación considerar la fuerza normal que actúa sobre una superficie *unidad* de la sección transversal. La intensidad de la fuerza normal por unidad de superficie se llama *tensión normal* y se mide en unidades de fuerza por unidad de superficie,  $\text{kg}/\text{cm}^2$ . A veces se usa la expresión *tensión total* para expresar la fuerza resultante axial total, en kilogramos. Si las fuerzas aplicadas a los extremos de la barra son tales que ésta está sometida a tracción, se establecen *tensiones de tracción* en la misma; si está sometida a compresión, tenemos *tensiones de compresión*. Es esencial que la línea de aplicación de las fuerzas pase por el centro de cada sección transversal de la barra.

**PROBETAS DE ENSAYO.** La carga axial representada en la Fig. 2a es frecuente en los problemas de diseño de estructuras y de máquinas. Para simular esta carga en el laboratorio se coloca una probeta entre las mordazas de una máquina de ensayos del tipo accionado eléctricamente o de una hidráulica, máquinas usadas corrientemente en los laboratorios de ensayo de materiales para aplicar una tracción axial.

En un intento de tipificar los métodos de ensayo, la Sociedad Americana de Ensayos de Materiales, comúnmente conocida por A. S. T. M., ha redactado especificaciones que son de uso común en USA y numerosos países de América y Europa. Se prescriben varios tipos de probetas para materiales metálicos y no metálicos, tanto para ensayos de tracción como de compresión, pero solo mencionaremos ahora dos de ellos, uno para chapas metálicas de espesor mayor de  $3/16$  de pulgada (unos 47 mm) que aparece en la Fig. 3, y otro para metales de espesor mayor de 1,5 pulgadas y que tiene el aspecto que aparece en la Fig. 4. Las dimensiones indicadas son las especificadas por la A. S. T. M., pero los extremos de las probetas pueden tener cualquier forma que se adapte a las mordazas de la máquina de ensayo que aplique la carga axial. Como se puede ver en las figuras, la parte central de la probeta es algo más delgada que las extremas para que no se produzca el fallo en la parte de las mordazas. Los chaflanes redondeados que se observan tienen por objeto evitar que se produzcan las llamadas concentraciones de esfuerzos en la transición entre las dos anchuras diferentes. De ordinario, se marca una longitud *standard patrón* en la que se miden los alargamientos, perforando dos pequeños orificios en la superficie de la barra con una separación de 2 o de 8 pulgadas, como puede verse.

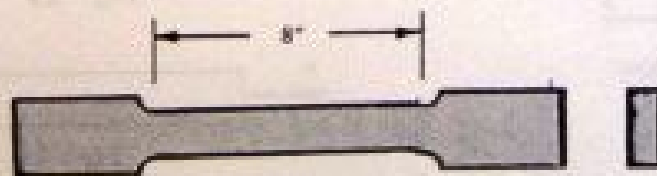


Fig. 3



Fig. 4

**DEFORMACION NORMAL.** Supongamos que se ha colocado una de estas probetas de tracción en una máquina de ensayos de tracción y compresión, y se aplican gradualmente en los extremos fuerzas de tracción. Se puede medir el alargamiento total en la longitud patrón para cualquier incremento predeterminado de la carga axial por medio de un aparato de medida mecánico y hallar, a partir de estos valores, el alargamiento por unidad de longitud llamado *deformación normal* y representado por  $\epsilon$ , dividiendo el alargamiento total  $\Delta$  por la longitud patrón  $L$ , es decir  $\epsilon = \Delta/L$ . Generalmente se expresa la deformación en centímetros por centímetros, por lo que es adimensional. A veces se usa la expresión *deformación total* para indicar el alargamiento en centímetros.

**CURVA TENSION-DEFORMACION.** Cuando se aumenta gradualmente la carga axial por incrementos de carga, se mide el alargamiento de la longitud patrón para cada incremento, continuando de este modo hasta que se produce la rotura de la probeta. Conociendo el área original de la sección transversal de la probeta puede obtenerse la *tensión normal*, representada por  $\sigma$ , para cada valor de la carga axial, simplemente utilizando la relación

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

donde  $P$  representa la carga axial en kilogramos y  $A$  el área primitiva de la sección transversal. Con varios pares de valores de la tensión normal  $\sigma$  y de la deformación normal  $\epsilon$  podemos representar gráficamente los datos experimentales tomando estas cantidades como ordenadas y abscisas, respectivamente. Así se obtiene un *diagrama tensión-deformación* del material para este tipo de carga. Este diagrama puede adoptar numerosas formas; en la Fig. 5 se representan varios gráficos típicos de materiales usados normalmente en ingeniería. Para un metal como el acero estructural de bajo contenido en carbono, los datos se agrupan aproximadamente como se indica en la Fig. 5a; para un material de los llamados frágiles como la fundición, el gráfico aparece como en la Fig. 5b, mientras que para la goma es típico el diagrama 5c.

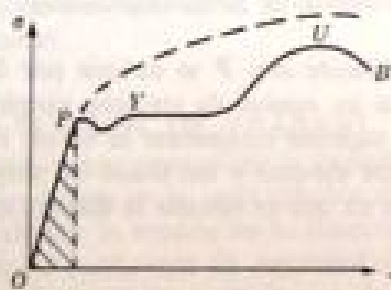


Fig. 5a

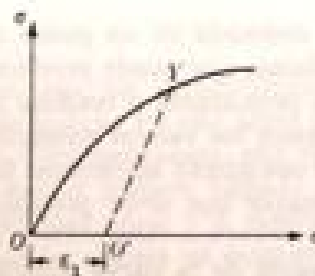


Fig. 5b

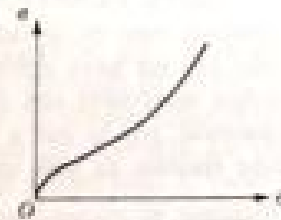


Fig. 5c

**MATERIALES DUCTILES Y FRÁGILES.** Los materiales metálicos usados en la ingeniería se clasifican generalmente en *ductiles* y *frágiles*. Un *material dúctil* es el que tiene un alargamiento a tracción relativamente grande hasta llegar al punto de rotura (por ejemplo, el acero estructural o el aluminio), mientras que un *material frágil* tiene una deformación relativamente pequeña hasta el mismo punto. Frecuentemente se toma como línea divisoria entre las dos clases de materiales un alargamiento arbitrario de 0,05 cm/cm. La fundición y el hormigón son ejemplos de materiales frágiles.

**LEY DE HOOKE.** Para un material cuya curva tensión-deformación es similar a la de la Fig. 5a resulta evidente que la relación entre tensión y deformación es lineal para los valores relativamente bajos de la deformación. Esta relación lineal entre el alargamiento y la fuerza axial que lo produce (pues cada una de estas cantidades difiere solo en una constante de la deformación y la tensión,

## PROBLEMAS PROPUESTOS

21. Una barra recta de sección uniforme está sometida a tracción axial. La sección es de  $6 \text{ cm}^2$  y la longitud de  $4 \text{ m}$ . Si el alargamiento total es de  $0,40 \text{ cm}$ , bajo una carga de  $12.600 \text{ kg}$ , hallar el módulo de elasticidad del material.  
Sol.  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
22. Calcular de qué altura se puede construir un muro vertical de hormigón si su resistencia de rotura es de  $176 \text{ kg/cm}^2$  y se emplea un coeficiente de seguridad 4. La densidad del hormigón es de  $2.200 \text{ kg/m}^3$ . Sol.  $h = 200 \text{ m}$
23. Un cilindro recto, hueco, de sección circular, de fundición, tiene un diámetro exterior de  $7,5 \text{ cm}$  y uno interior de  $6 \text{ cm}$ . Si se le carga con una fuerza axial de compresión de  $5.000 \text{ kg}$ , determinar el acortamiento total en  $50 \text{ cm}$  de longitud, así como la tensión normal bajo esa carga. Tomar como módulo de elasticidad  $E = 1,05 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y despreciar toda probabilidad de pandeo lateral del cilindro. Sol.  $\Delta = 0,015 \text{ cm}$ ,  $\sigma = 314 \text{ kg/cm}^2$
24. Una varilla circular maciza de acero, de  $6 \text{ mm}$  de diámetro y de  $40 \text{ cm}$  de longitud, está rigidamente unida al extremo de una barra cuadrada de bronce de  $2 \text{ cm}$  de lado y  $30 \text{ cm}$  de longitud, con sus ejes sobre la misma recta. Se aplica una fuerza de tracción axial de  $500 \text{ kg}$  en cada extremo. Determinar el alargamiento total del conjunto. Para el acero,  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el bronce  $E = 9,5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Sol.  $0,0376 \text{ cm}$
25. La armadura de la figura tiene los nudos articulados y soporta solamente la fuerza de  $15.000 \text{ kg}$ . Todas las barras son de acero SAE 1.020 con un límite elástico aparente de  $2.450 \text{ kg/cm}^2$ . Para los elementos que trabajan a tracción es suficiente un coeficiente de seguridad de 2. Determinar las secciones necesarias para las barras  $CD$  y  $AB$ . Véase la Figura (a). Sol. Sección  $CD = 6,12 \text{ cm}^2$ , sección  $AB = 7,65 \text{ cm}^2$

Fig. (a)  
Prob. 25

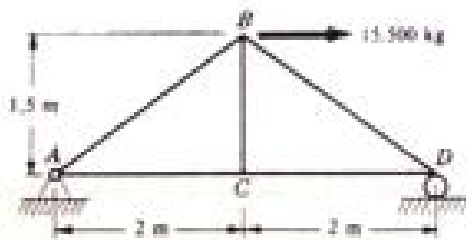


Fig. (c)  
Prob. 27



Fig. (b)  
Prob. 26

26. Una barra de acero de sección uniforme está suspendida verticalmente y soporta una carga de  $2.500 \text{ kg}$  en su extremo inferior, como se ve en la Fig. (b).  $25 \text{ cm}$  más arriba está aplicada una fuerza vertical de  $1.500 \text{ kg}$  y otros  $50 \text{ cm}$  más arriba otra de  $1.000 \text{ kg}$ . La longitud total de la barra es de  $150 \text{ cm}$  y su sección de  $6 \text{ cm}^2$ . El módulo de elasticidad es  $2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar el alargamiento total de la barra. Sol.  $0,0506 \text{ cm}$
27. Una barra de bronce de  $10 \text{ cm}^2$  de sección está sometida a las fuerzas axiales representadas en la Fig. (c). Determinar el alargamiento total de la barra, siendo  $E = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Sol.  $0,0013 \text{ cm}$
28. Los raíles de ferrocarril, de acero, están colocados con sus extremos contiguos separados  $3 \text{ mm}$  cuando la temperatura es de  $15^\circ \text{ C}$ . La longitud de cada rail es de  $12 \text{ m}$  y el material acero de  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 11 \times 10^{-6}$  por  $^\circ \text{ C}$ . (a) Calcular la distancia entre carriles cuando la temperatura es de  $-24^\circ \text{ C}$ . (b) ¿A qué temperatura estarán en contacto dos carriles contiguos? (c) Hallar la tensión de compresión en los raíles cuando la temperatura es de  $45^\circ \text{ C}$ . Despreciar toda posibilidad de pandeo de los carriles.  
Sol. Separación =  $0,815 \text{ cm}$ ,  $T = 37,7^\circ \text{ C}$ ,  $\sigma = 168 \text{ kg/cm}^2$

29. Durante un ensayo de tracción de un acero estirado en frío, de diámetro 13 mm, se han obtenido los siguientes datos:

Carga axial (kg)	Alargamiento en la long. patrón 5 cm
0	0
570	0,0010
830	0,0015
1.090	0,0020
1.380	0,0025
1.650	0,0030
1.920	0,0035
2.200	0,0040
2.460	0,0045
2.750	0,0050
3.040	0,0055
3.300	0,0060
3.110	0,0100
3.140	0,0200

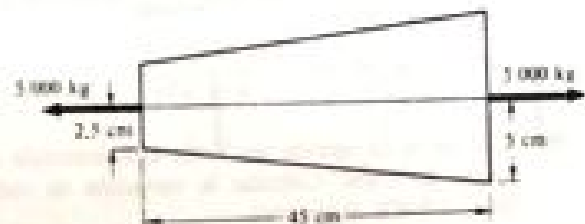
Carga axial (kg)	Alargamiento en la long. patrón 5 cm
3.140	0,0300
3.140	0,0400
3.120	0,0500
3.140	0,0600
3.160	0,1250
3.500	0,2500
4.230	0,5000
4.460	0,7500
4.560	1,0000
4.560	1,2500
4.460	1,5000
4.300	1,7500
4.020	1,8750

A la rotura, el diámetro final de la barra en la sección en que se produce fue de 0,75 mm. La longitud de los 5 cm patrón originales ha aumentado a 6,875 cm.

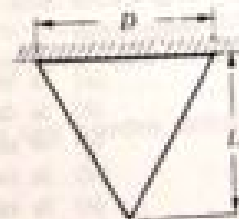
De los datos dados, determinar el límite de proporcionalidad del material, el módulo de elasticidad, el tanto por ciento de reducción de la sección, el alargamiento en tanto por ciento y la resistencia de rotura.

Sol. Límite de proporcionalidad 2.480 kg/cm<sup>2</sup>.  $E = 2,1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Tanto por ciento de reducción de la sección = 66,8. Tanto por ciento de alargamiento = 37,5. Resistencia de rotura = 3.029 kg/cm<sup>2</sup>.

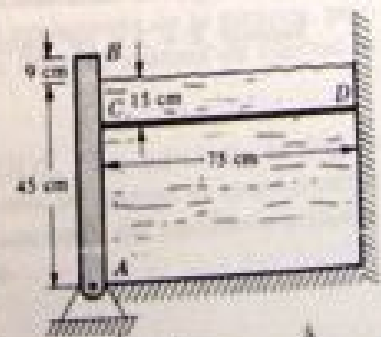
30. Una placa de acero delgada tiene la forma trapezoidal de la figura. El espesor es de 12 mm y varía uniformemente desde una anchura de 50 mm hasta otra de 100 mm en una longitud de 450 mm. Si se aplica en cada extremo una fuerza axial de 5.000 kg, determinar el alargamiento de la placa. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Sol. 0,0124 cm



31. Una barra cónica maciza de sección circular está suspendida verticalmente como se ve en la figura adjunta. La longitud de la barra es  $L$ , el diámetro de su base  $D$ , el módulo de elasticidad  $E$  y el peso por unidad de volumen  $\gamma$ . Determinar el alargamiento de la barra debido a su propio peso. Sol.  $\Delta = \frac{\gamma L^2}{6E}$

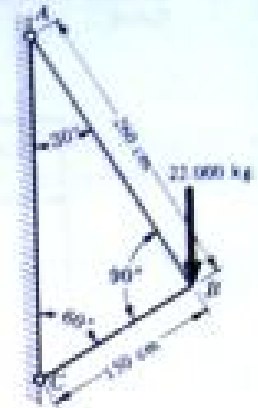


32. La compuerta vertical  $AB$  representada en el diagrama adjunto puede considerarse totalmente rígida y está articulada en  $A$ . Tiene 3 m de anchura y está sometida a presión hidrostática en toda su anchura. En  $C$  hay sujeta una barra de acero de 7,5 m de longitud y sección 3 cm<sup>2</sup> para atramentarla contra el muro en  $D$ . Hallar el desplazamiento horizontal del punto  $B$ . Despreciar el efecto de sujeción en los extremos de la compuerta. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6$ . Sol. Desplazamiento = 3,25 cm





33. Las barras de acero  $AB$  y  $BC$  están articuladas en sus extremos y soportan la carga de 22.000 kg que se muestra en la figura adjunta. El material es acero de estructuras con un límite elástico aparente de  $2,45 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ , siendo aceptables los coeficientes de seguridad 2 y 3,5 para tracciones y compresiones, respectivamente. Determinar la dimensión de cada barra y las componentes vertical y horizontal del desplazamiento del punto  $B$ . Tomar  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y despreciar la posibilidad de pandeo lateral de la barra  $BC$ .



Sol. Sección de  $AB = 15,55 \text{ cm}^2$

Sección de  $BC = 15,71 \text{ cm}^2$

$\Delta_x = 0,032 \text{ cm}$  (hacia la derecha)

$\Delta_y = 0,156 \text{ cm}$  (hacia abajo)

34. Una barra circular maciza de bronce de 2 cm de diámetro está sometida a una fuerza axial de tracción de 5.000 kg. Determinar la disminución del diámetro de la barra debida a esta carga. Para el bronce,  $E = 9,5 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$  y  $\mu = 0,28$ .  
Sol. 0,00047 cm
35. Una barra de acero cuadrada tiene 5 cm de lado y 25 cm de longitud, y está cargada por una fuerza de tracción axial de 20.000 kg. Si  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\mu = 0,3$ , determinar la variación unitaria de volumen.  
Sol. 0,000152
36. Considerar la barra cuadrada de aluminio descrita en el Problema 19, pero con la carga axial invertida, de modo que produzca compresión. Considerando una deformación por compresión de 0,001 cm/cm, determinar el volumen de la barra cuando está aplicada la carga. Sol. 624,788  $\text{cm}^3$
37. Considerar un estado de tensiones en un elemento para el cual se ejerce una tensión de  $\sigma_x$  en una dirección y se impide totalmente la contracción lateral en las otras dos direcciones. Hallar el módulo de elasticidad efectivo y el valor efectivo de la relación de Poisson.  
Sol. Mód. ef. =  $\frac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}$ ; Rel. ef. de Poisson = 0
38. Considerar el estado de tensiones en una barra sometida a compresión en la dirección del eje. La dilatación lateral está reducida a la mitad del valor que tendría si las caras laterales estuvieran libres. Hallar el módulo de elasticidad efectivo.  
Sol. Mód. ef. =  $\frac{E(1-\mu)}{(1-\mu-\mu^2)}$
39. Una barra de sección uniforme está sometida a tracción uniaxial y sufre una deformación en la dirección de la fuerza de 1/800. Calcular la variación de volumen por unidad. Suponer  $\mu = 1/3$ .  
Sol. 1/2.400 (aumento)
40. Una varilla recta de aluminio de 3 cm de diámetro está sometida a una fuerza de tracción axial de 5.000 kg. Determinar

- (a) la tensión unitaria  
(b) la deformación unitaria  
(c) el alargamiento en una longitud patrón de 20 cm  
(d) la variación de diámetro  
(e) la variación de sección  
(f) la variación de volumen en una longitud patrón de 20 cm

- Sol. (a) 710  $\text{kg/cm}^2$   
(b) 0,00101 cm/cm  
(c) 0,0202 cm  
(d) -0,000757 cm  
(e) -0,00356  $\text{cm}^2$   
(f) 0,0706  $\text{cm}^3$

Suponer  $E = 7 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu = 1/4$ .



## CAPITULO 2

### Sistemas de fuerzas estáticamente indeterminados Tracción y compresión

**DEFINICION DE SISTEMA DE FUERZAS DETERMINADO.** Si se pueden determinar los valores de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo, solamente por las ecuaciones del equilibrio estático, el sistema de fuerzas es *estáticamente determinado*. Todos los problemas del Capítulo 1 eran de este tipo.

**EJEMPLOS DE SISTEMAS DE FUERZA DETERMINADOS.** La barra representada en la Fig. 1 está cargada por la fuerza  $P$ . Las reacciones son  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . El sistema es estáticamente determinado, porque disponemos de tres ecuaciones del equilibrio estático para el sistema y son suficientes para determinar las tres incógnitas.

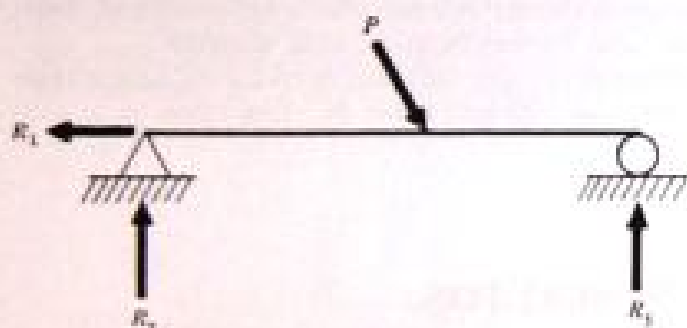


Fig. 1

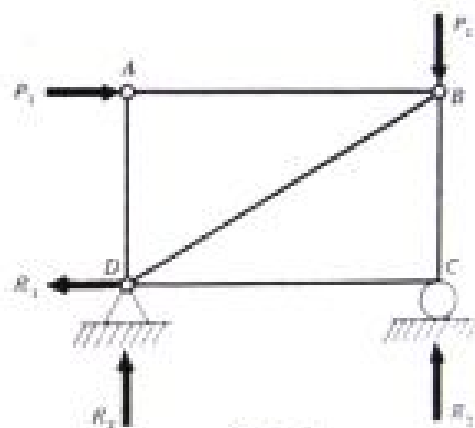


Fig. 2

La armadura  $ABCD$  representada en la Fig. 2 está cargada por las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$ . Las reacciones son  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Nuevamente, como se dispone de tres ecuaciones del equilibrio estático, se pueden determinar las tres reacciones desconocidas, por lo que el sistema de fuerzas exteriores es estáticamente determinado.

Los dos ejemplos anteriores se refieren solo a reacciones exteriores, por lo que pueden definirse los sistemas de fuerzas como estáticamente determinados exteriormente.

**DEFINICION DE SISTEMA DE FUERZAS INDETERMINADO.** En muchos casos, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo no pueden determinarse solo por las ecuaciones de la estática, porque hay más fuerzas desconocidas que ecuaciones de equilibrio. En este caso, el sistema de fuerzas es *estáticamente indeterminado*.

**EJEMPLOS DE SISTEMAS DE FUERZAS INDETERMINADOS.** La barra de la Fig. 3 está cargada con la fuerza  $P$ . Las reacciones son  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ . El sistema de fuerzas es estáticamente indeterminado porque hay cuatro reacciones desconocidas y solo tres ecuaciones del equilibrio estático. Se dice que tal sistema de fuerzas es indeterminado en primer grado.

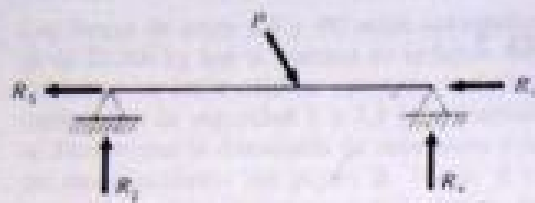


Fig. 3

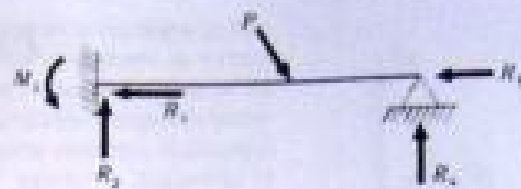


Fig. 4

La barra representada en la Fig. 4 es estáticamente indeterminada de segundo grado porque hay cinco reacciones desconocidas  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  y  $M_1$ , y solo tres ecuaciones del equilibrio estático. Por consiguiente, no pueden determinarse los valores de todas las reacciones con solo las ecuaciones de la estática.

**METODO DE ESTUDIO.** El procedimiento que consideraremos aquí se llama *método de la deformación*, porque estudia las deformaciones en el sistema. En resumen, el proceso a seguir para estudiar un sistema indeterminado consiste en escribir primero todas las ecuaciones del equilibrio estático correspondientes al mismo y luego *suplementarlas* con otras basadas en las deformaciones de la estructura. Hay que escribir suficiente número de ecuaciones sobre las deformaciones para que el total, junto con las de la estática, sea igual al número de fuerzas desconocidas que intervienen. Véanse en particular los Problemas 1, 2, 3, 4, 7, 12 y 13.

Por ejemplo, si un sistema contiene cinco fuerzas desconocidas, solo pueden escribirse tres ecuaciones del equilibrio estático para el sistema, por lo que es necesario suplementarlas con otras dos ecuaciones basadas en las deformaciones. Este sistema es estáticamente indeterminado de segundo grado. Para hallar las cinco incógnitas, es necesario resolver el sistema de cinco ecuaciones resultante. Afortunadamente, solo en muy pocos casos aparecen todas las incógnitas en cada ecuación.

En este capítulo trataremos de sistemas indeterminados que contienen barras a tracción o compresión. En capítulos sucesivos se estudiarán elementos indeterminados de otros tipos.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. La barra representada en la Fig. (a) es de sección constante y está sujeta rigidamente entre los muros. Si se aplica una carga  $P$  a la distancia  $L_1$  del extremo izquierdo, determinar las reacciones de los muros sobre la barra.

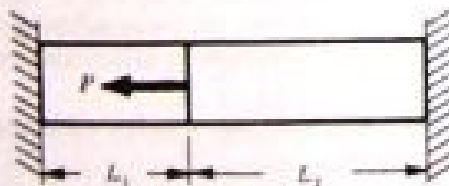


Fig. (a)

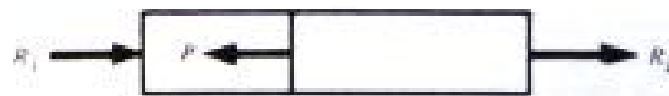


Fig. (b)

Dibujaremos primero el diagrama de cuerpo en libertad de la barra, mostrando la fuerza aplicada  $P$  juntamente con las reacciones de los muros, que representaremos por  $R_1$  y  $R_2$ , como se ve en la Figura (b).

Hay solo una ecuación de equilibrio estático, que es

$$\Sigma F_x = R_1 - P + R_2 = 0$$

Como esta ecuación contiene dos incógnitas ( $R_1$  y  $R_2$ ) el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que suplementar la ecuación con otra basada en las deformaciones de la barra.

El acortamiento de la parte de barra de longitud  $L_1$  debe ser igual al alargamiento del trozo de longitud  $L_2$ , lo que proporciona la base para obtener la ecuación referente a las deformaciones. La variación de longitud de una barra debida a carga axial se dio en el Problema 1, Capítulo 1. La fuerza axial que actúa en la parte izquierda de la barra es  $R_1$  (kg) y en la derecha  $R_2$  (kg). La ecuación que relaciona las deformaciones es

$$\frac{R_1 L_1}{AE} = \frac{R_2 L_2}{AE}$$

donde  $A$  representa el área de la sección de la barra y  $E$  el módulo de elasticidad. De esta ecuación tenemos que  $R_1 L_1 = R_2 L_2$  y resolviéndola, juntamente con la de la estática, hallamos

$$R_1 = \frac{PL_2}{L_1 + L_2} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{PL_1}{L_1 + L_2}$$

Conociendo esas reacciones, es evidente que el alargamiento de la parte derecha ( $L_2$ ) de la barra es

$$\Delta_2 = \frac{R_2 L_2}{AE} = \frac{PL_1 L_2}{(L_1 + L_2)AE}$$

y el acortamiento de la izquierda ( $L_1$ )

$$\Delta_1 = -\frac{R_1 L_1}{AE} = -\frac{PL_1 L_2}{(L_1 + L_2)AE}$$

por lo que

$$\Delta_2 = -\Delta_1$$

1. Considerar un tubo de acero que rodea a un cilindro macizo de aluminio, comprimido todo el conjunto entre placas infinitamente rígidas, por fuerzas aplicadas centralmente, como se ve en la Fig. (a). El cilindro de aluminio tiene 7,5 cm de diámetro y el diámetro exterior del tubo de acero es de 9 cm. Si  $P = 24.000$  kg, hallar las tensiones en el acero y en el aluminio. Para el acero,  $E = 2,1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> y para el aluminio  $E = 2,8 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>.

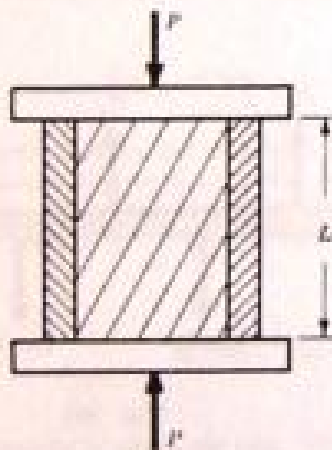


Fig. (a)

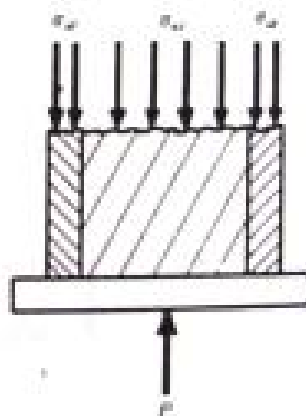


Fig. (b)

Tracemos un plano horizontal a través del conjunto a una altura cualquiera, excepto en la inmediación de las placas, y separemos una parte de la otra, por ejemplo, la superior. La parte que hemos quitado debe ser sustituida por el efecto que ejerce sobre el resto, efecto que consiste en esfuerzos verticales normales, distribuidos en los dos materiales. En la Fig. (b) se representa el diagrama de cuerpo en libertad de la parte del conjunto situada bajo el plano de corte, siendo  $\sigma_a$  y  $\sigma_s$  las tensiones normales que existen en el acero y el aluminio, respectivamente.

Si representamos la fuerza total soportada por el acero por  $P_s$  (kg) y la del aluminio por  $P_a$ ,

$$P_s = A_s \cdot \sigma_s \quad \text{y} \quad P_a = A_a \cdot \sigma_a$$

donde  $A_a$  y  $A_a$  representan las secciones del tubo de acero y el cilindro de aluminio, respectivamente. Solo disponemos de una ecuación de equilibrio estático para este sistema de fuerzas, y toma la forma

$$\Sigma F_x = P - P_a - P_a = 0$$

Así, pues, tenemos una ecuación con dos incógnitas  $P_a$  y  $P_a$ , por lo que el problema es estáticamente indeterminado. En este caso tenemos que suplementar la ecuación de la estática por otra deducida de las deformaciones de la estructura. Esta ecuación se obtiene fácilmente porque las placas infinitamente rígidas obligan a ser iguales a las deformaciones axiales de los dos metales.

La deformación debida a la carga axial está dada por  $\Delta = PL/AE$ . Igualando las deformaciones axiales del acero y el aluminio, tenemos

$$\frac{P_a \cdot L}{A_a \cdot E_a} = \frac{P_a \cdot L}{A_a \cdot E_a}$$

$$\text{o} \quad \frac{P_a \cdot L}{\frac{\pi}{4} [(19)^2 - (7.5)^2] (2.1 \times 10^6)} = \frac{P_a \cdot L}{\frac{\pi}{4} (7.5)^2 (2.8 \times 10^6)} \quad \text{de donde} \quad P_a = 3.3P_a$$

Resolviendo esta ecuación conjuntamente con la de la estática  $P - P_a - P_a = 0$ , hallamos  $P_a = 0.233P$ ,  $P_a = 0.767P$ .

Para una carga de 24.000 kg, se obtiene  $P_a = 5.590$  kg,  $P_a = 18.410$  kg, y dividiendo las fuerzas resultantes en cada material por su sección, se obtienen las tensiones buscadas:

$$\sigma_a = \frac{5.590}{\frac{\pi}{4} (7.5)^2} = 126 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_a = \frac{18.410}{\frac{\pi}{4} [(19)^2 - (7.5)^2]} = 947 \text{ kg/cm}^2$$

3. La barra  $AB$  es absolutamente rígida y está soportada por tres varillas, como se ve en la Fig. (a). Las dos varillas extremas son de acero y tienen una sección de  $3 \text{ cm}^2$ . La central es de cobre y de sección  $9 \text{ cm}^2$ . Para el acero,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , y para el cobre,  $E = 1.2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Todas las varillas tienen 2,10 m y están igualmente separadas entre sí, estando aplicadas las cargas de 6.000 kg en el punto medio entre ellas. Despreciando el peso de la barra  $AB$ , determinar la fuerza en cada una de las barras verticales.  $AB$  permanece horizontal después de aplicar las cargas.

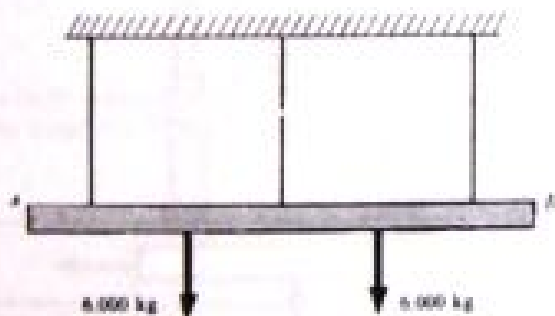


Fig. (a)

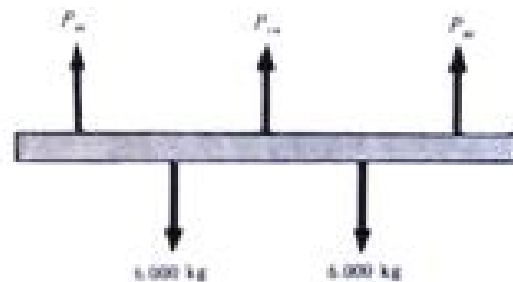


Fig. (b)

Primero dibujaremos un diagrama de cuerpo en libertad de la barra  $AB$  en que aparezcan todas las fuerzas que actúan en ella, incluyendo las dos cargas aplicadas y las reacciones de las varillas verticales. Si se representa la fuerza en cada una de las varillas de acero por  $P_a$  (kg) y la de la de cobre por  $P_a$  (kg), el diagrama aparece como en la Figura (b).

Ya se ha hecho uso de la condición de simetría al decir que las fuerzas son iguales en las dos varillas de acero, por lo que solo queda una ecuación de equilibrio estático, que es

$$\Sigma F_x = 2P_a + P_a - 12.000 = 0$$

Tenemos, pues, una ecuación con dos incógnitas y el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que suplementarla con otra que provenga de las deformaciones de la estructura.

Se determina fácilmente esta ecuación porque el alargamiento de las varillas de acero y de cobre es el mismo. Aplicando la expresión del alargamiento debido a una carga axial  $\Delta = PL/AE$  a las varillas, tenemos

$$\frac{P_{ac}(210)}{(3)(2,1 \times 10^6)} = \frac{P_{cu}(210)}{(9)(1,2 \times 10^6)} \quad \text{o} \quad P_{ac} = 0,583P_{cu}$$

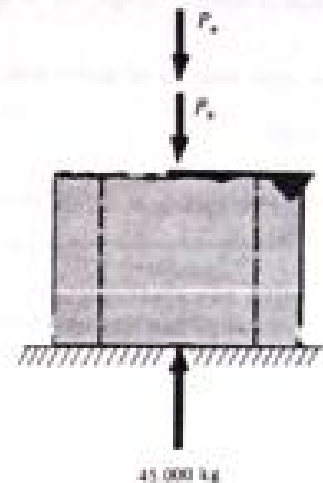
Resolviendo esta ecuación juntamente con la de la estática, se tiene

$$2(0,583P_{ac}) + P_{ac} - 12.000 = 0$$

y despejando,  $P_{ac} = 5.540 \text{ kg}$  y  $P_{cu} = 3.230 \text{ kg}$ .

4. Considerar un pilar cuadrado de hormigón armado de  $30 \times 30 \text{ cm}$  de sección y  $2,40 \text{ m}$  de altura. El hormigón está armado con ocho barras verticales de acero, cuadradas, de  $2 \text{ cm}$  de lado, colocadas simétricamente respecto al eje vertical del pilar. Se ha aplicado una fuerza de compresión axial de  $45.000 \text{ kg}$ , a través de una placa absolutamente rígida en la parte superior del hormigón. Considerar, para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el hormigón  $E = 1,75 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar la tensión en el hormigón y en el acero.

Cortemos el pilar por un plano horizontal y quitemos la parte de encima de este plano. La parte suprimida deberá sustituirse por cualquier efecto que ejerciera sobre la parte inferior, efecto que consiste en fuerzas verticales distribuidas sobre el hormigón y sobre el acero. El diagrama de cuerpo en libertad de la parte inferior tiene el aspecto representado en el diagrama adjunto, donde  $P_a$  y  $P_h$  representan las fuerzas resultantes que se ejercen sobre el acero y sobre el hormigón, respectivamente, por la parte superior que se ha suprimido. La fuerza  $P_h$ , por ejemplo, es en realidad la resultante de las tensiones normales que se supone uniformemente repartidas sobre toda la sección transversal del hormigón. Como la carga es axial, es razonable suponer una distribución uniforme de la tensión normal, por lo que la resultante  $P_h$  está en el eje geométrico del pilar.



Solo hay disponible una ecuación de equilibrio estático para este sistema, que es

$$\Sigma F_v = 45.000 - P_h - P_a = 0$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas, por lo que el problema es estáticamente indeterminado y es necesario tratarla juntamente con otra ecuación basada en la deformación de la estructura. Esta ecuación se obtiene fácilmente, pues el acortamiento del hormigón y del acero son iguales a causa de la placa rígida. La deformación bajo la carga axial es  $\Delta = PL/AE$ , y aplicando esta expresión a los dos materiales, tenemos

$$\frac{P_a \cdot L}{8(2)^2(2,1 \cdot 10^6)} = \frac{P_h \cdot L}{[900 - 8(2)^2](1,75 \cdot 10^5)}$$

donde  $L$  representa la altura del pilar. Despejando,  $P_a = 0,442P_h$  y

$$45.000 - P_h - 0,442P_h = 0, \quad P_h = 31.200 \text{ kg, y } P_a = 13.800 \text{ kg}$$

La tensión en el acero se halla dividiendo la fuerza resultante en las ocho barras, por su sección. Del mismo modo, se obtiene la tensión en el hormigón dividiendo la fuerza resultante  $P_h$  por la sección del hormigón. Así,

$$\sigma_a = \frac{13.800}{8(2)^2} = 430 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_h = \frac{31.200}{900 - 8(2)^2} = 36 \text{ kg/cm}^2$$

5. Un tubo de acero, vertical, de diámetro exterior 90 cm e interior 88 cm, está lleno de hormigón. Si el límite elástico aparente del acero es de  $3,1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ , se admite un coeficiente de seguridad 2,25 y la resistencia a rotura del hormigón es de  $175 \text{ kg/cm}^2$  y su coeficiente de seguridad 2,5. ¿qué carga axial total de compresión puede soportar? Suponer que los dos extremos del tubo están cubiertos por placas infinitamente rígidas, y despreciar los efectos de la expansión lateral de los dos materiales. Tomar para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el hormigón  $E = 1,75 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . (La relación del módulo de Young para el acero y para el hormigón se suele designar por  $n$ , esto es,  $n = E_a/E_h$ . Aquí,  $n = 12$ .)

La sección del hormigón es de  $6.082 \text{ cm}^2$ , y la del acero  $280 \text{ cm}^2$ . Como la variación total de altura del acero debe ser igual a la del hormigón, tenemos

$$\frac{P_h \cdot L}{(6.082)(1,75 \cdot 10^5)} = \frac{P_a \cdot L}{(280)(2,1 \cdot 10^6)} \quad \text{o} \quad P_h = 1,81 P_a$$

siendo  $P_h$  y  $P_a$  las fuerzas resultantes en el hormigón y en el acero, respectivamente. Por la estática solo tenemos la ecuación  $P = P_h + P_a$ , siendo  $P$  la carga axial total soportada.

Es improbable que se alcance la tensión de trabajo admisible para los dos materiales simultáneamente. Probablemente, el procedimiento más sencillo es calcular dos valores de la carga total axial, uno basado en la hipótesis de que el hormigón está sometido a su carga de trabajo de  $70 \text{ kg/cm}^2$  y el otro suponiendo que el acero alcanza la suya de  $1.380 \text{ kg/cm}^2$ , siendo el menor de estos dos valores el determinante. Así, si el hormigón está sometido a su tensión de trabajo máxima, tenemos

$$P = 70(6.082)(1 + 1,81) = 661.000 \text{ kg}$$

Por otro lado, si el acero está sometido a  $1.380 \text{ kg/cm}^2$ , tenemos

$$P = 1.380(280)(1 + 1,81) = 1.086.000 \text{ kg}$$

Por consiguiente, la carga axial admisible es  $P = 661.000 \text{ kg}$ .

6. La barra  $AD$ , inicialmente recta, tiene una sección uniforme y está amordazada en los apoyos extremos, como se ve en la figura, sin que exista ninguna tensión inicial. Se aplican las cargas simétricamente colocadas de la Fig. (a) a las ménsulas (cuyo efecto se desprecia) y se desea hallar la fuerza de tracción o compresión resultante sobre cada sección transversal en cada una de las zonas  $AB$ ,  $BC$  y  $CD$ .

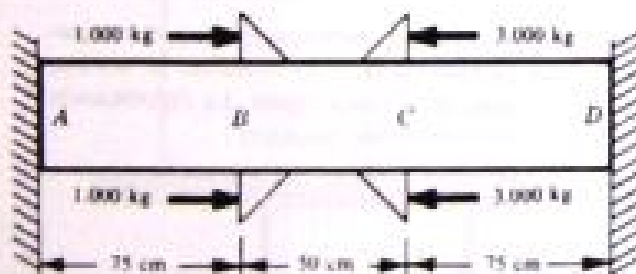


Fig. (a)



Fig. (b)

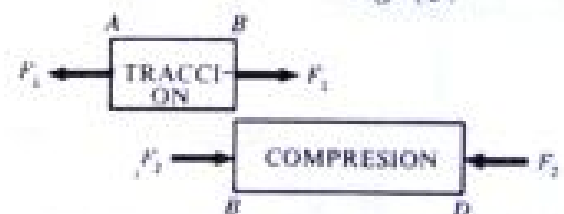


Fig. (c)

Consideremos primero solamente la carga total de  $2.000 \text{ kg}$  aplicada en  $B$  y comprobemos que la barra  $AD$  está en equilibrio. Habrá dos reacciones  $F_1$  y  $F_2$  en los extremos de la barra para equilibrar la fuerza de  $2(1.000) = 2.000 \text{ kg}$ . Entre  $A$  y  $B$  habrá una tracción de  $F_1$ , y entre  $B$  y  $D$  una compresión, como se ve en la Fig. (b), lo que puede representarse también como en la Fig. (c). Así,  $F_1$  alarga  $AB$  y  $B$  se mueve la distancia  $\Delta_1 = F_1(75)/AE$  hacia la derecha. Del mismo modo,  $F_2$  comprime  $BD$  y  $B$  se mueve  $\Delta_2 = F_2(125)/AE$ .

Evidentemente,  $\Delta_1 = \Delta_2$  y podemos escribir  $\frac{F_1(75)}{AE} = \frac{F_2(125)}{AE}$  o  $F_1 = \left(\frac{5}{3}\right) F_2$ .

De la estática tenemos solamente la ecuación  $\Sigma F_x = -F_1 - F_2 + 2,000 = 0$ . Sustituyendo,

$$(5/3)F_2 + F_2 = 2,000, \quad F_2 = 750 \text{ kg (BD está en compresión)} \quad \text{y} \quad F_1 = 1,250 \text{ kg (AB está en tracción)}$$

La distribución de las fuerzas axiales internas es ya evidente. Debido a la carga de  $203,000 = 6,000$  kg, tenemos

$$(5/8)(6,000) = 3,750 \text{ kg (CD está en tracción)}$$

$$(3/8)(6,000) = 2,250 \text{ kg (AD está en compresión)}$$

Sumando algebraicamente los resultados anteriores, se pueden hallar ya las fuerzas axiales resultantes en las distintas partes de AD. Los valores finales son

$$AB = 1,250 - 2,250 = -1,000 \text{ kg}, \quad BC = -750 - 2,250 = -3,000 \text{ kg}, \quad CD = -750 + 3,750 = 3,000 \text{ kg}$$

donde el signo positivo indica fuerza de tracción y el negativo de compresión.

7. Considerar la barra AB de la Fig. (a) absolutamente rígida y horizontal antes de aplicar la carga de 20,000 kg, articulada en A y soportada por la varilla de acero EB y la de cobre CD. La longitud de CD es de 90 cm y la de EB de 150 cm. Si la sección de CD es de  $3 \text{ cm}^2$  y la de EB de  $3 \text{ cm}^2$ , determinar la tensión en cada varilla vertical y el alargamiento de la de acero. Despreciar el peso de AB. Para el cobre,  $E = 1,2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

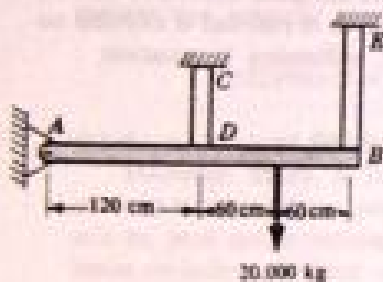


Fig. (a)

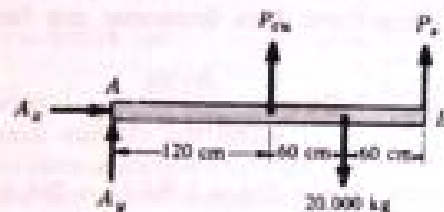


Fig. (b)



Fig. (c)

El primer paso para resolver el problema es trazar el diagrama de cuerpo en libertad de la barra AB, con todas las fuerzas que actúan sobre ella. Es lo que se ha hecho en la Figura (b).

De la estática, tenemos

$$(1) \quad \Sigma F_x = A_x = 0$$

$$(2) \quad \Sigma M_a = 120P_{2a} + 240P_2 - 20,000(180) = 0$$

$$(3) \quad \Sigma F_y = A_y + P_{2a} + P_2 - 20,000 = 0$$

Como las dos últimas ecuaciones tienen tres incógnitas, el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que buscar otra, basada en las deformaciones del sistema. Como la barra AB es rígida, el único movimiento que puede producirse es un giro del cuerpo rígido alrededor de A como centro. La línea de trazos de la Fig. (c) indica la posición final de AB después de aplicar la carga de 20,000 kg. Inicialmente, esa barra era horizontal, como muestra la línea llena.

Los extremos inferiores de las varillas estaban al principio en D y B y se trasladan a D' y B' después de aplicar la carga. Como la barra AB es rígida, los triángulos semejantes ADD' y ABB' nos proporcionan una relación sencilla entre las deformaciones de las dos barras verticales:  $\Delta_{cu}/120 = \Delta_a/240$  expresando por  $\Delta_{cu}$  y  $\Delta_a$  los alargamientos de las varillas de cobre y acero, respectivamente. Por tanto, la ecuación suplementaria basada en las deformaciones es

$$\Delta_a = 2\Delta_{cu}$$

Pero el alargamiento bajo carga axial viene dado por  $\Delta = PL/AE$ . Utilizando esta expresión en la relación anterior entre deformaciones, tenemos

$$\frac{P_2(150)}{(3)(2,1 \times 10^6)} = \frac{2P_{2a}(90)}{(5)(1,2 \times 10^6)} \quad \text{o} \quad P_2 = 1,26P_{2a}$$



Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la (2) de la estática, tenemos

$$120P_{ca} + 240(1,26P_{ca}) = 360.000; \quad P_{ca} = 8.500 \text{ kg} \quad \text{y} \quad P_{ca} = 10.700 \text{ kg}$$

Las tensiones se obtienen por la relación  $\sigma = P/A$ .

$$\text{En la varilla de cobre,} \quad \sigma_{ca} = 8.500/5 = 1.700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{En la varilla de acero,} \quad \sigma_a = 10.700/3 = 3.600 \text{ kg/cm}^2$$

8. Una barra de cobre tiene sección uniforme y está unida rigidamente a los muros, como se ve en la figura. La longitud es de 150 cm y la sección de 15 cm<sup>2</sup>. A la temperatura de 25° C la varilla no tiene tensiones. Determinar las que existen en ella cuando descienda la temperatura a 10°, suponiendo que los apoyos no ceden. Para el cobre,  $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 16 \times 10^{-6}$  por °C.

Un modo de resolver este problema es suponer que se corta la barra y se la separa del muro en el extremo derecho. En tal caso, es libre de contraerse cuando la temperatura desciende, contrayéndose la longitud

$$\Delta = (16 \times 10^{-6})(150)(15) = 0,036 \text{ cm}$$

de acuerdo con la definición de coeficiente de dilatación lineal (véase Capítulo 1).

Ahora, es necesario hallar la fuerza axial  $P$  que hay que aplicar a la barra para alargarla 0,036 cm, esto es, para volver a llevar el extremo derecho a su posición verdadera, porque sabemos que en la realidad el extremo no se desplaza en absoluto al bajar la temperatura. Para determinar esta fuerza  $P$ , utilizamos la ecuación

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{que da} \quad 0,036 = \frac{P(150)}{(15)(1,1 \times 10^6)} \quad \text{o} \quad P = 3.960 \text{ kg}$$

La tensión axial que produce esta fuerza es  $\sigma = P/A = 3.960/15 = 264 \text{ kg/cm}^2$ .

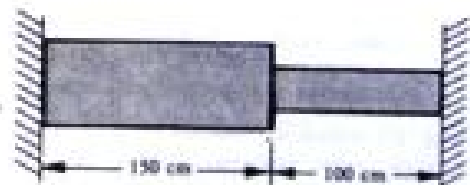
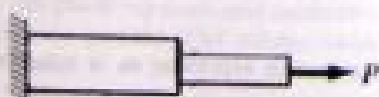


9. La barra compuesta de la figura está rigidamente sujeta a los dos apoyos. La parte de la izquierda es de cobre, con sección uniforme 70 cm<sup>2</sup> y longitud 150 cm, mientras que la derecha es de aluminio, con sección uniforme de 18 cm<sup>2</sup> y longitud 100 cm. A la temperatura de 25° C, el conjunto está sin tensiones. La temperatura de la estructura desciende, y durante este proceso el soporte derecho cede 0,05 cm en el sentido de la contracción del metal. Determinar la temperatura mínima a que puede someterse el conjunto para que la tensión en el aluminio no exceda de 1.700 kg/cm<sup>2</sup>. Para el cobre,  $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17 \times 10^{-6}/\text{°C}$ , y para el aluminio,  $E = 7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 22,2 \times 10^{-6}/\text{°C}$ .

Nuevamente, como en el ejemplo anterior, es quizá más sencillo considerar que la barra se corta inmediatamente a la izquierda del muro que la soporta por el lado derecho, quedando libre para contraerse por la baja de temperatura  $\Delta T$ . El acortamiento total de la barra compuesta está dado por

$$(17 \cdot 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22,2 \cdot 10^{-6})(100)(\Delta T)$$

de acuerdo con la definición de coeficiente de dilatación lineal. Es de observar que la forma de la sección no tiene influencia en el cambio de longitud de la barra por variación de la temperatura.



Aun cuando la barra se haya contraído esta cantidad, sigue estando libre de tensiones, pero no hemos terminado el estudio, porque se ha suprimido la reacción del muro de la derecha cortando allí la barra. Por tanto, debemos representar la acción del muro por una fuerza axial  $P$ , aplicada a la barra, como se ve en el adjunto diagrama. Para que exista equilibrio, la fuerza resultante sobre cada sección transversal del cobre o del aluminio debe ser igual a  $P$ . La aplicación de la fuerza  $P$  alarga la



barra compuesta en una longitud  $\frac{P(150)}{70(1,1 \cdot 10^6)} + \frac{P(100)}{18(0,7 \cdot 10^6)}$

Si no cediera el apoyo derecho, igualaríamos la última expresión a la que da el acortamiento total debido al descenso de temperatura, pero como dicho apoyo cede 0,05 cm, podemos escribir

$$\frac{P(150)}{70(1,1 \cdot 10^6)} + \frac{P(100)}{18(0,7 \cdot 10^6)} = (17 \cdot 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22,2 \cdot 10^{-6})(100)(\Delta T) - 0,05$$

La tensión en el aluminio no debe exceder de 1.700 kg/cm<sup>2</sup> y como viene dada por la fórmula  $\sigma = P/A$ , la fuerza máxima es

$$P = A \cdot \sigma = 18(1.700) = 30.600 \text{ kg}$$

Sustituyendo este valor de  $P$  en la ecuación anterior entre deformaciones, hallamos  $\Delta T = 74^\circ \text{C}$ , por lo que la temperatura puede descender  $74^\circ$  desde la original de  $25^\circ$ , siendo la final de  $-49^\circ \text{C}$ .

10. Considerar la barra cónica de acero de la figura, que tiene los dos extremos sujetos en apoyos indeformables y está inicialmente libre de tensiones. Si la temperatura desciende  $22^\circ \text{C}$ , determinar la tensión máxima en la barra. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ \text{C}$ .

Quizá el modo más sencillo de resolver este problema es imaginar que un extremo de la barra, por ejemplo, el derecho, está temporalmente suelto de su apoyo. En este caso, la barra contrae una longitud

$$(22)(90)(11 \times 10^{-6}) = 0,0218 \text{ cm}$$

debido al descenso de temperatura.

Hallemos, ahora, la fuerza axial que hay que aplicar al extremo derecho «libre», para que la barra se alargue 0,0218 cm, esto es, para que se satisfaga en ese extremo la condición de límite verdadera, de fijeza completa. Adoptando el sistema de coordenadas de la figura, tenemos

$$r = 5 + 5x/90 = 5 + x/18$$

Como el ángulo con que varía la sección es relativamente pequeño, se puede suponer que la fuerza de tracción está uniformemente distribuida en cada sección transversal. Como tampoco hay cambios bruscos de sección, podemos determinar el alargamiento del elemento discoidal de espesor  $dx$ , aplicando  $\Delta = PL/AE$ , donde  $L = dx$ , al disco e integrando luego a lo largo de toda la barra:

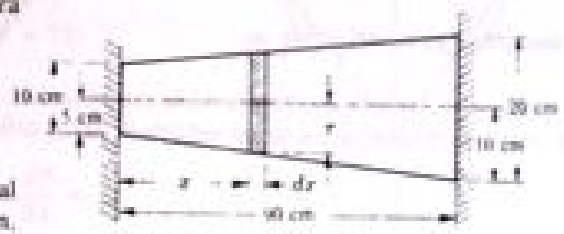
$$0,0218 = \int_0^{90} \frac{Pdx}{\pi(5 + x/18)^2 E} = \int_0^{90} \frac{324Pdx}{\pi E(90 + x)^2} = \frac{324P}{180E\pi}$$

Y despejando,  $P = 80.000 \text{ kg}$ , siendo  $P$  la fuerza resultante axial que actúa sobre cada sección, esto es, la fuerza necesaria para volver a llevar la barra a su longitud original.

Debe observarse que la fuerza resultante en cada sección vertical es  $P$  (kg) para que exista equilibrio en cualquier parte de la barra. Sin embargo, como el área de la sección varía de un extremo de la barra al otro, la tensión varía desde un valor máximo en el extremo izquierdo en que la sección es mínima, hasta un mínimo en el extremo derecho en que es máxima la sección.

La tensión máxima en el extremo izquierdo está dada por  $\sigma_{\max} = \frac{80.000}{\pi(5)^2} = 1.020 \text{ kg/cm}^2$ .

11. Un cilindro hueco de acero rodea a otro macizo de cobre y el conjunto está sometido a una carga axial de 25.000 kg, como se muestra en la Fig. (a). La sección del acero es de  $18 \text{ cm}^2$ , mientras que la del cobre es de  $60 \text{ cm}^2$ . Ambos cilindros tienen la misma longitud antes de aplicar la carga. Determinar el aumento de temperatura del sistema necesario para colocar toda la carga en el cilindro de cobre. La placa de cubierta de la parte superior del conjunto es rígida, y para el cobre  $E = 1,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17 \times 10^{-6}/^\circ \text{C}$ , mientras que para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ \text{C}$ .



Un procedimiento para resolver este problema es suponer que se suprimen la carga y la placa superior de tapa, permitiendo al sistema dilatarse libremente en sentido vertical por un aumento de temperatura  $\Delta T$ . En estas condiciones, los extremos superiores de los cilindros adoptan las posiciones representadas en la Fig. (b) por líneas de trazos.

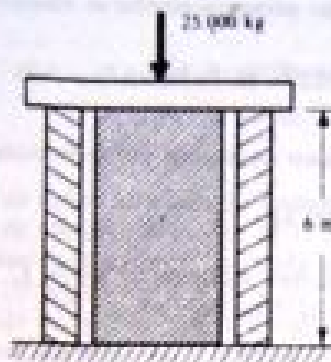


Fig. (a)

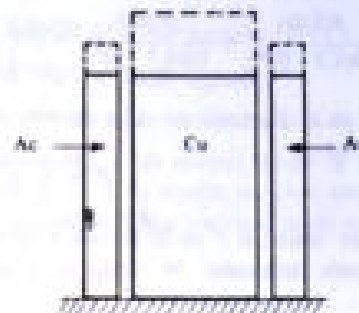


Fig. (b)

Naturalmente, el cilindro de cobre se dilata hacia arriba más que el de acero, porque el coeficiente de dilatación lineal del cobre es mayor que el del acero. La dilatación del acero es

$$(11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

mientras que la del cobre es

$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

No cabe duda de que ésta no es la situación real, porque todavía no se ha considerado la carga de 25.000 kg. Si toda esta carga axial ha de ser soportada por el cobre, sólo será comprimido él, y la compresión viene dada por

$$\Delta_{ca} = \frac{Pl}{AE} = \frac{25.000(600)}{(60)(1.1 \times 10^6)}$$

El enunciado del problema dice que el aumento de temperatura  $\Delta T$  es el preciso para que el cobre soporte toda la carga. Por tanto, la longitud del cobre aumentada, representada por las líneas de trazos en el esquema anterior, disminuirá por efecto de la fuerza, y la dilatación total será la causada por el aumento de temperatura menos la compresión debida a la carga. La variación de longitud del acero es debida sólo al cambio de temperatura. En consecuencia, podemos escribir

$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) - \frac{25.000(600)}{(60)(1.1 \times 10^6)} = (11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) \quad \text{o} \quad \Delta T = 63^\circ \text{C}$$

12. La barra rígida  $AD$  está articulada en  $A$ , y unida a las  $BC$  y  $ED$ , como se ve en la Fig. (a). Todo el sistema está al principio sin tensiones y son despreciables los pesos de las barras. La temperatura de la barra  $BC$  disminuye  $30^\circ \text{C}$  y la de la barra  $ED$  aumenta los mismos  $30^\circ \text{C}$ . Despreciando toda posibilidad de pandeo lateral, hallar las tensiones normales en las barras  $BC$  y  $ED$ . Para  $BC$ , que es de bronce, suponer  $E = 9,8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , y para  $ED$ , que es de acero, tomar  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . La sección de  $BC$  es de  $6 \text{ cm}^2$  y la de  $ED$  de  $3 \text{ cm}^2$ .

Expresemos las fuerzas aplicadas sobre  $AD$  por  $P_x$  y  $P_y$  y supongamos que actúan en las direcciones representadas en el diagrama de cuerpo en libertad de la Fig. (b). Como  $AD$  gira rigidamente alrededor de  $A$  (como se representa por la línea de trazos), tenemos  $\Delta_{ca}/26 = \Delta_{ca'}/65$ , donde  $\Delta_{ca}$  y  $\Delta_{ca'}$  representan el acortamiento y el alargamiento axiales de  $BC$  y  $DE$ , respectivamente.

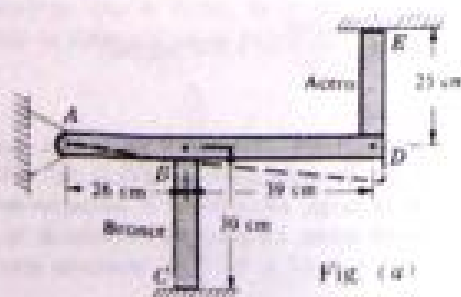


Fig. (a)



Fig. (b)

La variación total de longitud de  $BC$  está compuesta por un acortamiento debido al descenso de temperatura y el debido a la fuerza axial  $P_m$ . La variación total de longitud de  $DE$  está compuesta por un alargamiento debido al aumento de temperatura y otro producido por la fuerza  $P_m$ . Por tanto, tenemos

$$\frac{2}{5} [111 \times 10^{-6} \times 25 \times 30] + \frac{P_m(25)}{(3 \times 2,1 \times 10^4)} = -(17,7 \times 10^{-6} \times 30 \times 30) + \frac{P_m(30)}{(6 \times 9,8 \times 10^4)}$$

$$5,102P_m - 1,587P_m = 19,230$$

$$\Sigma M_A = 26P_m - 65P_m = 0$$

De la estática,

y resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones,  $P_m = 1,720 \text{ kg}$ ,  $P_m = 4,300 \text{ kg}$ .

Utilizando la expresión  $\sigma = P/A$  para cada barra, obtenemos  $\sigma_m = 573 \text{ kg/cm}^2$  y  $\sigma_m = 716 \text{ kg/cm}^2$ .

13. Considerar la armadura articulada, estáticamente indeterminada, de la Fig. (a). Antes de aplicar la carga  $P$ , todo el sistema está libre de tensiones. Hallar la fuerza axial producida en cada barra por la fuerza vertical  $P$ . Las dos barras exteriores son idénticas y tienen una sección  $A_1$ , mientras que la sección de la intermedia es  $A_2$ . Todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad  $E$ .

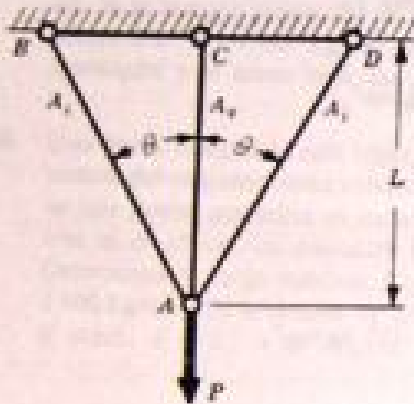


Fig. (a)



Fig. (b)

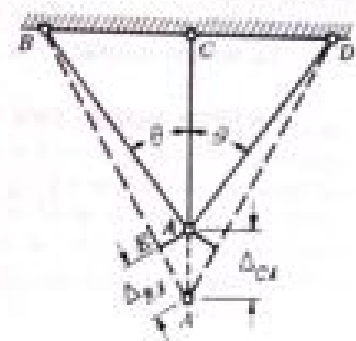


Fig. (c)

En la Fig. (b) aparece el diagrama de cuerpo en libertad de la articulación  $A$ , expresando por  $F_1$  y  $F_2$  las fuerzas axiales (kg) en las barras vertical e inclinadas. Por la estática, tenemos

$$\Sigma F_y = F_1 + 2F_2 \cos \theta - P = 0$$

Esta es la única ecuación de la estática de que disponemos, pues hemos hecho uso de la simetría al decir que las fuerzas son iguales en las dos barras inclinadas. Como contiene dos incógnitas,  $F_1$  y  $F_2$ , el sistema de fuerzas es estáticamente indeterminado, por lo que hemos de examinar las deformaciones para obtener otra ecuación. Bajo la acción de la carga  $P$ , las barras adoptan las posiciones representadas por líneas de trazos en la Figura (c).

Como las deformaciones del sistema son pequeñas, la forma geométrica general permanece prácticamente inalterada y se puede considerar que el ángulo  $BA'A$  vale  $\theta$ . El triángulo  $AEA'$  es rectángulo y  $AE$ , que en realidad es un arco con radio igual a la longitud de las barras inclinadas, es perpendicular a  $BA'$ . Por tanto, el alargamiento de la barra vertical está representado por  $AA'$  y el de las barras inclinadas por  $EA'$ . De este triángulo pequeño tenemos la relación

$$\Delta_{BA} = \Delta_{CA} \cos \theta$$

donde  $\Delta_{BA}$  y  $\Delta_{CA}$  representan alargamientos de las barras inclinadas y vertical, respectivamente.

Como esas barras están sometidas a carga axial se pueden hallar los alargamientos por la fórmula  $\Delta = PL/AE$ . De esta expresión, tenemos

$$\Delta_{BA} = \frac{F_2(L/\cos \theta)}{A_1 E} \quad \text{y} \quad \Delta_{CA} = \frac{F_1 L}{A_2 E}$$

respectivamente) fue observada por primera vez por sir Robert Hooke en 1678 y lleva el nombre de *ley de Hooke*. Por tanto, para describir esta zona inicial del comportamiento del material, podemos escribir

$$\sigma = E\varepsilon$$

donde  $E$  representa la pendiente de la parte recta ( $OP$ ) de la curva tensión-deformación de la Figura 5a.

**MODULO DE ELASTICIDAD.** La cantidad  $E$ , es decir, la relación de la tensión unitaria a la deformación unitaria se suele llamar *módulo de elasticidad* del material en tracción o, a veces, *módulo de Young*. En los manuales aparecen tabulados los valores de  $E$  para diversos materiales usados en la ingeniería. Como la deformación unitaria  $\varepsilon$  es un número abstracto (relación entre dos longitudes) es evidente que  $E$  tiene las mismas unidades que la tensión, por ejemplo,  $\text{kg/cm}^2$ . Para muchos de los materiales usados en la ingeniería el módulo de elasticidad en compresión es casi igual al encontrado en tracción. Hay que tener muy en cuenta que el comportamiento de los materiales bajo una carga, tal como se estudia en este libro, se limita (si no se dice lo contrario) a esa región lineal de la curva tensión-deformación.

## PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES

La curva tensión-deformación de la Fig. 5a se puede usar para determinar varias características de resistencia del material. Estas son:

**LIMITE DE PROPORCIONALIDAD.** A la ordenada del punto  $P$  se le conoce por *límite de proporcionalidad*, esto es, la máxima tensión que se puede producir durante un ensayo de tracción simple de modo que la tensión sea función lineal de la deformación. Para un material que tenga la curva tensión-deformación como la representada en la Fig. 5b no existe límite de proporcionalidad.

**LIMITE ELASTICO.** La ordenada de un punto que casi coincide con  $P$  se conoce por *límite elástico*, esto es, la tensión máxima que puede producirse durante un ensayo de tracción simple de modo que no haya deformación permanente o residual cuando se suprime totalmente la carga. Para muchos materiales son casi idénticos los valores numéricos del límite elástico y del límite de proporcionalidad, por lo que a veces se consideran sinónimos. En los casos en que es notoria la diferencia, el límite elástico es casi siempre mayor que el de proporcionalidad.

**ZONA ELASTICA.** La región de la curva tensión-deformación que va desde el origen hasta el límite de proporcionalidad.

**ZONA PLASTICA.** La región de la curva tensión-deformación que va desde el límite de proporcionalidad hasta el punto de rotura.

**LIMITE ELASTICO APARENTE O DE FLUENCIA.** A la ordenada del punto  $Y$  en el que se produce un aumento de deformación sin aumento de tensión se le conoce por *límite elástico aparente* o *límite de fluencia* del material. Cuando la carga ha aumentado hasta el punto  $Y$ , se dice que se produce fluencia. Algunos materiales presentan en la curva tensión-deformación dos puntos en los que hay aumento de deformación sin que aumente la tensión. Se les conoce por *límites de fluencia superior e inferior*.

**RESISTENCIA A TRACCION.** La ordenada del punto  $U$ , máxima de la curva, se llama *resistencia a tracción* o, a veces, *resistencia última* del material.

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior que relaciona  $\Delta_{Bd}$  y  $\Delta_{Cd}$ , tenemos

$$\frac{F_2 L}{A_2 E \cos \theta} = \frac{F_1 L}{A_1 E} \cos \theta \quad \text{o} \quad F_2 = F_1 \left( \frac{A_1}{A_2} \right) \cos^2 \theta$$

Sustituyendo en la ecuación de la estática hallamos  $F_1 + 2F_1(A_1/A_2) \cos^2 \theta = P$

$$\text{o} \quad F_1 = \frac{P}{1 + 2(A_1/A_2) \cos^2 \theta} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{P \cos^2 \theta}{(A_1/A_2) + 2 \cos^2 \theta}$$

14. En la armadura articulada estudiada en el Problema 13, cada barra inclinada tiene una sección de  $6 \text{ cm}^2$ , la vertical de  $12 \text{ cm}^2$ ,  $BC = CD = 30 \text{ cm}$ ,  $CA = 40 \text{ cm}$ , y  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Si la carga aplicada es  $P = 6.000 \text{ kg}$ , determinar la tensión normal en cada barra y la deformación vertical del punto  $A$ .

Aquí, tenemos  $A_1 = 6 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 12 \text{ cm}^2$ ,  $\cos \theta = 40/50 = 4/5$ , y  $P = 6.000 \text{ kg}$ . Del Problema 13, la fuerza axial en la barra vertical  $CA$  es

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2(A_1/A_2) \cos^2 \theta} = \frac{6.000}{1 + 2(6/12)(4/5)^2} = 3.968 \text{ kg}$$

La tensión normal en la barra  $CA$  es  $\sigma_1 = F_1/A_2 = 3.968/12 = 330 \text{ kg/cm}^2$ .

La fuerza axial en cada una de las barras inclinadas es, del Problema 13,

$$F_2 = \frac{P \cos^2 \theta}{(A_1/A_2) + 2 \cos^2 \theta} = \frac{6.000(4/5)^2}{(12/6) + 2(4/5)^2} = 1.270 \text{ kg}$$

La tensión normal en cada barra inclinada es  $\sigma_2 = F_2/A_1 = 1.270/6 = 210 \text{ kg/cm}^2$ .

La deformación vertical del punto  $A$  es, del Problema 13,

$$\Delta_{Ca} = \frac{F_1 L}{A_2 E} = \frac{(3.968)(40)}{(12)(2,1 \times 10^6)} = 0,0063 \text{ cm}$$

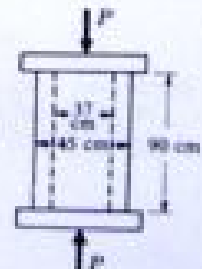
## PROBLEMAS PROPUESTOS

15. Una barra cuadrada de  $5 \text{ cm}$  de lado está sujeta rígidamente entre los muros y cargada con una fuerza axial de  $20.000 \text{ kg}$ , como se ve en la figura. Determinar las reacciones en los extremos de la barra y el alargamiento de la parte derecha. Tomar  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .



Sol. Reacción izquierda =  $12.000 \text{ kg}$ , reacción derecha =  $8.000 \text{ kg}$   
Alargamiento =  $0,0023 \text{ cm}$

16. Un corto tubo de fundición, de sección cuadrada, está lleno de hormigón. La dimensión exterior de la fundición es de  $45 \text{ cm}$  y el espesor de la pared de  $4 \text{ cm}$ . El conjunto está comprimido por una fuerza axial  $P$  de  $70.000 \text{ kg}$  aplicada a placas de tapa infinitamente rígidas, como se muestra en la figura. Determinar la tensión en cada material y el acortamiento del elemento. Para el hormigón, tomar  $E = 1,75 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y para la fundición  $E = 1,05 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .



Sol.  $\sigma_f = 62,4 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma_c = 10,4 \text{ kg/cm}^2$   
 $\Delta = 0,00535 \text{ cm}$

17. Dos barras inicialmente rectas están unidas entre sí y sujetas a apoyos, como se ve en la figura. La de la izquierda es de bronce para el cual  $E = 9,8 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , y la de la derecha es de aluminio, para el cual  $E = 7 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 22,2 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Las secciones de las barras de bronce y de aluminio miden, respectivamente,  $6 \text{ cm}^2$  y  $9 \text{ cm}^2$ . Se supone que el sistema está inicialmente libre de tensiones y que, entonces, la temperatura desciende  $22^\circ \text{C}$ .



- (a) Si los apoyos no ceden, hallar la tensión normal en cada barra, suponiendo su peso despreciable.  
 (b) Si el apoyo derecho cede  $0,012 \text{ cm}$ , hallar la tensión normal en cada barra, suponiendo su peso despreciable.  
 Sol. (a)  $\sigma_b = 420 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_a = 280 \text{ kg/cm}^2$ ; (b)  $\sigma_b = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_a = 180 \text{ kg/cm}^2$

18. Un tubo de acero de  $5 \text{ cm}$  y  $4,4 \text{ cm}$  de diámetros exterior e interior, respectivamente, rodea a un cilindro macizo de bronce de  $3,75 \text{ cm}$  de diámetro, unidos ambos a una placa de cubierta rígida, en cada extremo. El conjunto está exento de tensiones a la temperatura de  $25^\circ \text{C}$ . Si la temperatura aumenta hasta  $120^\circ$ , determinar las tensiones en cada material. Para el bronce,  $E = 9,8 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ; para el acero,  $E = 2,1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Sol.  $\sigma_s = 720 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_b = 290 \text{ kg/cm}^2$

19. Un pilar corto de hormigón armado está sometido a una carga de compresión axial. Ambos extremos están cubiertos por placas infinitamente rígidas, de modo que las deformaciones totales del acero y el hormigón son iguales. Si la tensión producida en el hormigón es de  $65 \text{ kg/cm}^2$ , hallar la correspondiente al acero. Tomar, para el acero,  $E = 2,1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ , y considerar  $n = 12$  ( $n = E_s/E_c$ ). Despreciar los efectos de expansión lateral del hormigón y el acero bajo esa carga. Sol.  $\sigma_s = 780 \text{ kg/cm}^2$

20. Una barra compuesta está constituida por una tira de cobre entre dos placas de acero laminado en frío. Los extremos del conjunto están cubiertos por placas infinitamente rígidas, y se aplica a la barra una carga  $P$ , por medio de una fuerza que actúa en cada una de las placas rígidas, como se ve en la Fig. (a). La anchura de todas las barras es de  $10 \text{ cm}$ , las placas de acero tienen un espesor de  $0,6 \text{ cm}$  cada una y el de la de cobre es de  $1,8 \text{ cm}$ . Determinar la carga máxima  $P$  que puede aplicarse. La carga de rotura del acero es  $5.600 \text{ kg/cm}^2$  y la del cobre  $2.100 \text{ kg/cm}^2$ . Es admisible un coeficiente de seguridad de 3, basado en la carga de rotura de cada material. Para el acero,  $E = 2,1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$  y para el cobre  $E = 9 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ . Sol.  $P = 32.200 \text{ kg}$

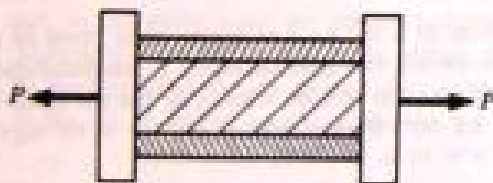


Fig. (a) Prob. 20

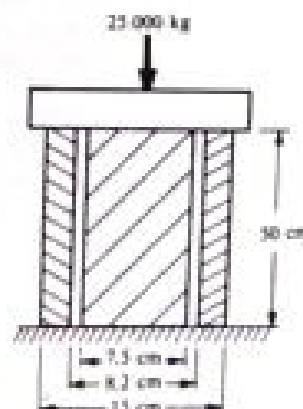


Fig. (b) Prob. 21

21. Un cilindro recto circular de aluminio rodea a otro de acero, como se ve en la Fig. (b), y se aplica la carga axial de compresión de  $25.000 \text{ kg}$  a través de las placas de cubierta infinitamente rígidas, representadas. Si el cilindro de aluminio es  $0,025 \text{ cm}$  más largo que el de acero antes de aplicar ninguna carga, hallar la tensión normal en cada uno de ellos cuando la temperatura haya descendido  $30^\circ \text{C}$  y esté actuando toda la carga. Tomar, para el acero,  $E = 2,1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , y para el aluminio,  $E = 7 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 22,2 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Sol.  $\sigma_s = 125 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_a = 155 \text{ kg/cm}^2$

22. La barra horizontal rígida  $AB$  está soportada por tres cables verticales, como se ve en la Fig. (a) siguiente, y soporta una carga de  $12.000 \text{ kg}$ . El peso de  $AB$  es despreciable y el sistema está exento de tensiones antes de apli-



car los 12.000 kg. Después de aplicados, la temperatura de los tres cables aumenta  $14^{\circ}\text{C}$ . Hallar la tensión en cada cable y la posición de la carga aplicada para que  $AB$  permanezca horizontal. Tomar para el cable de acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ; para el cable de bronce  $E = 9,8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ , y el de cobre  $E = 1,2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 16 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ . Se desprecia la posibilidad de pandeo lateral de cualquiera de los cables. En la figura aparecen las longitudes y secciones de los cables.

Sol.  $\sigma_w = 2.500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_w = 1.950 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_w = 1.750 \text{ kg/cm}^2$ ,  $x = 13,75 \text{ cm}$

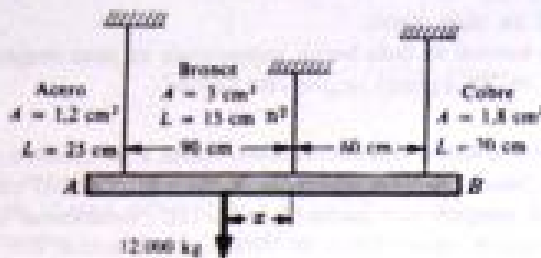


Fig. (a) Prob. 22

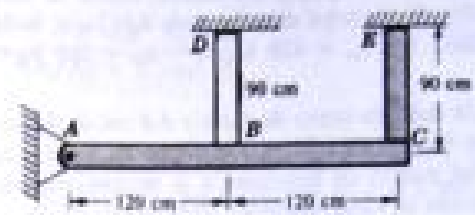


Fig. (b) Prob. 23

23. La barra  $AC$  es totalmente rígida, está articulada en  $A$  y unida a las  $DB$  y  $CE$  como se ve en la Fig. (b). El peso de  $AC$  es de 5.000 kg y el de las otras dos barras es despreciable. Si la temperatura de las barras  $DB$  y  $CE$  aumenta  $40^{\circ}\text{C}$ , hallar las tensiones producidas en esas barras.  $DB$  es de cobre, para el cual  $E = 1,05 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  y la sección  $12 \text{ cm}^2$ , mientras que la  $CE$  es de acero, para el cual  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  y la sección  $6 \text{ cm}^2$ . Despreciar la posibilidad de pandeo lateral en las barras.
- Sol.  $\sigma_w = 743 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_w = -327 \text{ kg/cm}^2$

24. Considerar la barra rígida  $BD$  que está soportada por los dos cables que aparecen en la Fig. (c). Los cables están inicialmente exentos de tensión y los pesos de todos los elementos son despreciables. Hallar la tracción en cada cable cuando se ha aplicado la carga  $P$  al extremo de la barra. Los dos cables tienen el mismo módulo de elasticidad.

Sol. Fuerza en  $AD = \frac{2P}{A_1 L_1^2 H / (2A_2 L_2^2 + 2H/L_2)}$ , fuerza en  $AC = \frac{2P}{4HA_2 L_2^2 / (A_1 L_1^2 + H/L_1)}$

25. Considerar tres barras idénticas conectadas con pasador, dispuestas como se indica en la Fig. (d), y que soportan la carga  $P$ . Las barras forman entre sí ángulos de  $120^{\circ}$ . Hallar la fuerza axial en cada una y el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga. Despreciar la posibilidad de pandeo lateral en las barras.
- Sol. Fuerza en cada una de las barras superiores =  $P/3$ , fuerza en la barra inferior =  $-2P/3$ ,  $\Delta_v = 2PL/3AE$

26. Las tres barras representadas en la Fig. (e) soportan la carga vertical de 2.500 kg. Las barras están libres de tensión y unidas por un pasador en  $A$  antes de aplicar la carga. Si se coloca ésta gradualmente, y simultáneamente decrece la temperatura de las tres barras  $8^{\circ}\text{C}$ , calcular la tensión en cada una de ellas. Las dos extremas son de bronce y sección de  $2,4 \text{ cm}^2$ , y la central de acero y sección  $1,8 \text{ cm}^2$ . Para el bronce,  $E = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ , y para el acero,  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\alpha = 11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .
- Sol.  $\sigma_w = 718 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_w = 356 \text{ kg/cm}^2$

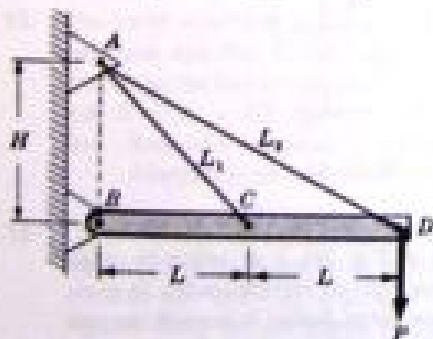


Fig. (c) Prob. 24

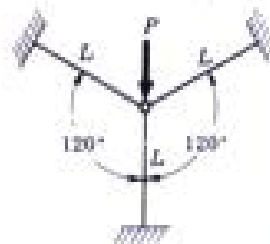


Fig. (d) Prob. 25

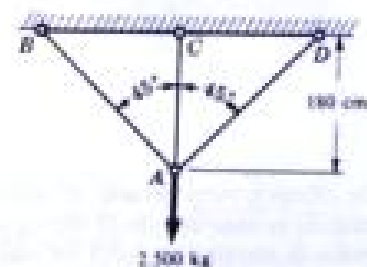


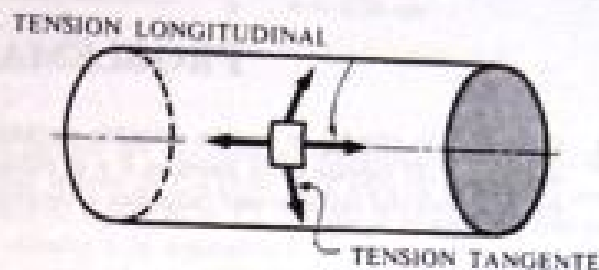
Fig. (e) Prob. 26

## CAPITULO 3

# Cilindros y esferas de paredes delgadas

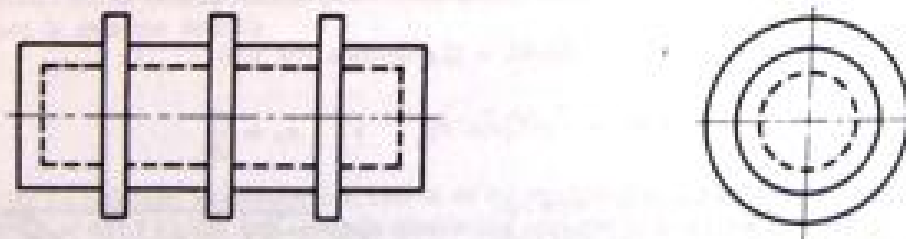
En los Capítulos 1 y 2 hemos examinado varios casos concernientes a tensiones normales uniformes que actúan en barras. Otra aplicación de las tensiones normales repartidas uniformemente se presenta en el estudio aproximado de cilindros y esferas de paredes delgadas sometidos a presión interior de gases o líquidos.

**NATURALEZA DE LAS TENSIONES.** Si el cilindro representado en el croquis adjunto está sometido a una presión interior uniforme en las paredes se producen tensiones normales en dos direcciones. Las que actúan en la dirección del eje geométrico del cilindro se llaman axiales o longitudinales y las que lo hacen en una dirección perpendicular, tangentes. Se supone que estas tensiones actúan sobre un elemento como el representado, y lo hacen en el plano de la pared del cilindro.



**HIPÓTESIS.** Se supone que las tensiones de tracción o compresión que existen en la pared del cilindro o esfera se pueden considerar *uniformemente* distribuidas en el espesor de la pared. Asimismo, se supone que las cargas, tensiones y deformaciones en las membranas cilíndricas son simétricas respecto al eje del cilindro. Véanse los Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10. Se considera que las tensiones y deformaciones en las membranas esféricas son simétricas respecto al centro de la esfera. Véase el Problema 7.

**LIMITACIONES.** La relación del espesor de la pared al radio de curvatura no debe exceder de 0,10 aproximadamente. Además no debe haber discontinuidades en la estructura. El método simplificado que se presenta aquí no permite considerar anillos de refuerzo en las membranas cilíndricas, como los representados en la figura de abajo, ni da una indicación precisa de las tensiones y deformaciones en la proximidad de las placas de cierre de los extremos en los depósitos de presión cilíndricos. Aun con todo, el método es satisfactorio en muchos casos.



Los problemas que se presentan se refieren a las tensiones que se producen por una presión interna que actúa en un cilindro o esfera. Las fórmulas de las diversas tensiones serán correctas si se invierte



el sentido de la presión, esto es, si sobre el depósito actúa una presión exterior. Sin embargo, debe observarse que debe tomarse en cuenta otra consideración, que se escapa del objeto de este libro; no solo hay que estudiar la distribución de tensiones, sino que hay que hacer otro estudio de naturaleza totalmente diferente para determinar la carga para la cual la membrana *pandeo* debido a la compresión. Puede producirse un fallo por pandeo o inestabilidad aunque la tensión máxima esté muy por debajo de la tensión máxima de trabajo admisible para el material.

**APLICACIONES.** Ejemplos corrientes de cilindros y esferas de paredes delgadas son los tanques y depósitos de almacenamiento de líquidos, tuberías de agua, calderas, cascos submarinos y ciertos componentes de los aeroplanos.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar un cilindro de paredes delgadas cerrado con placas en sus extremos y sometido a una presión interior uniforme  $p$ . El espesor de la pared es  $h$  y el radio interior  $r$ . Despreciando los efectos limitativos de las placas extremas, calcular las tensiones tangentes y longitudinal que existen en las paredes por causa de esta carga.

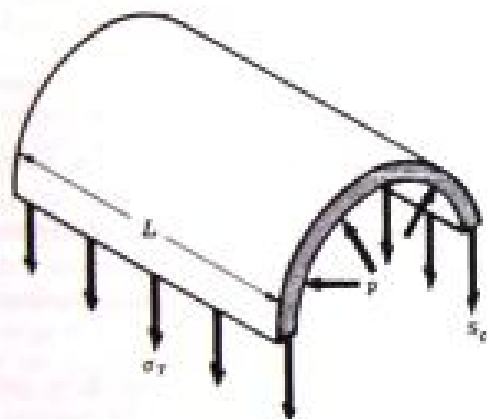


Fig. (a)



Fig. (b)

Para determinar la tensión tangente  $\sigma_t$  consideremos que se suprime del depósito una parte del cilindro de longitud  $L$ . El diagrama de cuerpo en libertad de una mitad de esta parte tiene el aspecto que aparece en la Fig. (a). Obsérvese que se ha cortado el cuerpo de modo que el efecto, originalmente *interno* ( $\sigma_t$ ), aparece ahora en este cuerpo libre como una fuerza *exterior*. La Fig. (b) muestra las fuerzas que actúan en una sección.

Las componentes horizontales de las presiones radiales se anulan entre sí en virtud de la simetría respecto al eje vertical. En la dirección vertical tenemos la siguiente ecuación de equilibrio

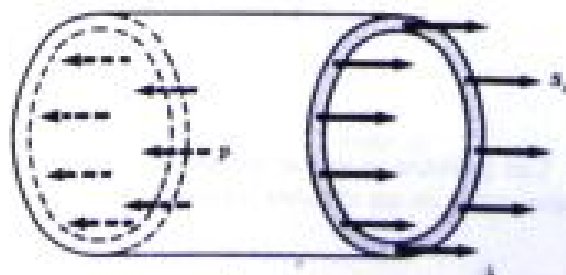
$$\sum F_v = -2\sigma_t hL + \int_0^\pi p r d\theta (\sin \theta) dL = 0$$

e integrando

$$2\sigma_t hL = -prL[\cos \theta]_0^\pi \quad \text{y} \quad \sigma_t = \frac{pr}{h}$$

Obsérvese que se podría haber obtenido la fuerza vertical resultante, debida a la presión  $p$ , multiplicando la presión por la proyección *horizontal* de la superficie sobre la que actúa esa presión.

Para determinar la tensión longitudinal  $\sigma_l$  consideremos una sección dada al cilindro normal a su eje geométrico. En la figura adjunta se da el diagrama de cuerpo en libertad de la parte de cilindro restante. Para el equilibrio,



$$\sum F_x = -pr^2 + 2rhc\sigma_t = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_t = \frac{pr}{2h}$$

En consecuencia, la tensión tangente es doble de la longitudinal. Así, si se hiela el agua en una tubería cerrada, el tubo se romperá a lo largo de una línea que corra longitudinalmente a lo largo del cilindro. Estas expresiones sencillas de las tensiones no son válidas en la inmediata proximidad de las placas extremas de cierre.

2. Una tubería de agua de fundición de 20 cm de diámetro interior ha de estar sometida a una presión interior de 14 kg/cm<sup>2</sup>. ¿Cuál es el espesor mínimo del tubo para que la tensión no exceda de la de trabajo de 250 kg/cm<sup>2</sup>? Por el Problema 1 sabemos que la tensión en la dirección tangencial es la que se considera siempre para el diseño. Por tanto,

$$\sigma_T = \frac{pr}{h} \quad 250 \text{ kg/cm}^2 = \frac{(14 \text{ kg/cm}^2)(10 \text{ cm})}{h} \quad \text{y} \quad h = 0.56 \text{ cm}$$

3. El tanque de un compresor de aire consiste en un cilindro cerrado por dos extremos semiesféricos. El cilindro tiene 60 cm de diámetro interior y está sometido a una presión interna de 35 kg/cm<sup>2</sup>. Si el material es un acero cuyo límite de fluencia es 2.500 kg/cm<sup>2</sup> y se utiliza un coeficiente de seguridad de 3,5, calcular el espesor de pared necesario. Despreciar los efectos locales en la unión del cilindro y la semiesfera.

Los extremos del tanque están cerrados, por lo que, de acuerdo con el Problema 1, existe una tensión tangente en la pared del cilindro dada por  $\sigma_T = pr/h$  y otra longitudinal dada por  $\sigma_L = pr/2h$ .

Como la tensión tangente es el doble de la longitudinal, es la crítica para el proyecto, y no debe exceder de la máxima tensión de trabajo admisible, 2.500/3,5 kg/cm<sup>2</sup>. Por tanto, para la tensión tangente tenemos

$$\frac{2.500}{3,5} = \frac{35(30)}{h} \quad \text{o} \quad h = 1,47 \text{ cm.}$$

Un estudio más completo exigiría la consideración de las tensiones en los extremos semiesféricos.

4. Una caldera de vapor debe tener 150 cm de diámetro interior. Está sometida a una presión interna de 8,5 kg/cm<sup>2</sup>. ¿Cuál será la tracción en el vaso cilíndrico por centímetro de costura longitudinal? ¿Por centímetro de costura circular?

Por el Problema 1 sabemos que la presión interior que actúa en un cilindro hueco da origen a una tensión tangente  $\sigma_T = pr/h$ , y una longitudinal  $\sigma_L = pr/2h$ . Para nuestros datos,  $p = 8,5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $r = 75 \text{ cm}$ , podemos escribir

$$(1) \quad \sigma_T = \frac{8,5(75)}{h} = \frac{637,5}{h} \quad \text{y} \quad (2) \quad \sigma_L = \frac{8,5(75)}{2h} = \frac{318,75}{h}$$

Aunque el espesor  $h$  es desconocido, podemos calcular la fuerza por unidad de longitud de cada una de las costuras. Representemos la longitudinal por  $T_T$ . La inspección del primer croquis del Problema 1 indica que  $T_T$  viene dada por la relación sencilla

$$(3) \quad T_T = \sigma_T \cdot h$$

La dirección de  $T_T$  coincide, evidentemente, con la de  $\sigma_T$  representada. La comparación de las ecuaciones (1) y (3) indica que  $T_T = 637,5 \text{ kg/cm}$ . Por tanto, la tensión por centímetro de costura longitudinal es de 637,5 kg.

Del mismo modo, podemos expresar la fuerza por unidad de longitud de costura circular por  $T_L$ . La inspección del tercer croquis del Problema 1 indica que

$$(4) \quad T_L = \sigma_L \cdot h$$

siendo la dirección de  $T_L$  la misma que la de  $\sigma_L$ . La comparación de las ecuaciones (2) y (4) indica que  $T_L = 318,75 \text{ kg/cm}$ , por lo que la tensión por centímetro de costura circular es de 318,75 kg.

5. Un depósito de reserva vertical de acero, esto es, un tanque cilíndrico abierto por arriba y que tiene el eje vertical, tiene 240 cm de diámetro interior y 25 m de altura. El tanque está lleno de agua, con densidad  $1.000 \text{ kg/m}^3$  y el material es acero de estructuras con un límite de fluencia de  $2.500 \text{ kg/cm}^2$  y se utiliza un coeficiente de seguridad 2. ¿Cuál es el espesor de chapa necesario en el fondo del tanque si se supone que la costura longitudinal por soldadura es tan fuerte como el metal? ¿Qué espesor se necesita si la costura tiene solamente el 85 % de la eficacia del metal macizo?

La presión  $p$  (en cualquier dirección) en la base del tanque está dada por la fórmula  $p = \rho h$ , donde  $\rho$  representa el peso del líquido por unidad de volumen y  $h$  la altura de la columna de agua sobre la base. Esta fórmula es evidente, si se considera que la presión en un metro cuadrado de la base es igual al peso de una columna de agua de un metro cuadrado de sección y  $h$  metros de altura. Por tanto, la presión en la base es

$$p = 1.000(25) = 25.000 \text{ kg/m}^2 \quad \text{o} \quad p = 2,5 \text{ kg/cm}^2$$

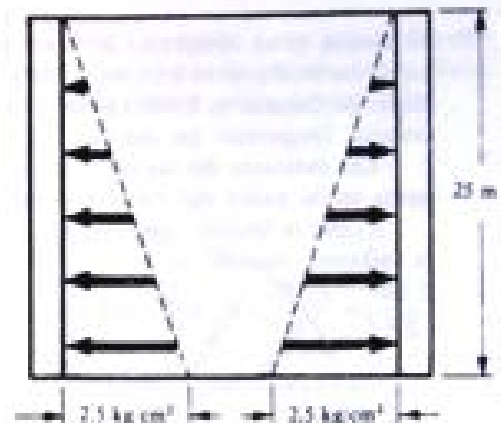
Como esta presión es hidrostática, actúa en todas las direcciones con la misma intensidad, y en particular radialmente, contra la pared interior del depósito, como se ve en la figura adjunta. Como puede verse en la expresión  $p = \rho h$ , la presión radial decrece hacia la parte alta del depósito, como se ha representado en el croquis, estando el máximo en la base, por lo que es ésta la zona que debe considerarse para el diseño.

Como la parte superior del depósito está abierta, no hay tensión longitudinal, y por el Problema 1 sabemos que la tangente en cualquier parte del tanque está dada por  $\sigma_T = pr/h$ . Considerando la zona de la base, esta ecuación se convierte en

$$\frac{2.500}{2} = \frac{2,5(120)}{h} \quad \text{o} \quad h = 0,24 \text{ cm}$$

Esto supone que las costuras longitudinales son tan resistentes como el metal macizo. En la realidad, este espesor se incrementaría ligeramente para evitar los efectos de la corrosión.

Si las costuras longitudinales solamente tienen el 85 % de la resistencia del metal macizo, el espesor necesario es  $h = 0,24/0,85 = 0,283 \text{ cm}$ .



6. Calcular el aumento de radio del cilindro considerado en el Problema 1, producido por la presión interna  $p$ .

Consideremos las cargas longitudinales y tangentes por separado. Debido a la presión radial  $p$  solamente, la tensión tangente está dada por  $\sigma_T = pr/h$ , y como  $\sigma = E\epsilon$ , la deformación tangencial es  $\epsilon_T = pr/Eh$ .

Hay que observar que  $\epsilon_T$  es una deformación unitaria. La longitud sobre la que actúa es la circunferencia del cilindro, que es  $2\pi r$ , por lo que el alargamiento total de la circunferencia vale

$$\Delta = \epsilon_T(2\pi r) = 2\pi pr^2/Eh$$

La longitud final de la circunferencia es, pues:  $2\pi r + 2\pi pr^2/Eh$ . Dividiendo esta circunferencia por  $2\pi$  hallamos que el nuevo radio del cilindro es:  $r + pr^2/Eh$  y el aumento de radio:  $pr^2/Eh$ .

Debido sólo a la presión axial  $p$ , se producen tensiones longitudinales  $\sigma_L = pr/2h$ , que dan origen a deformaciones longitudinales  $\epsilon_L = pr/2Eh$ . Como en el Capítulo 1, un aumento en la dirección de la carga, que aquí es la dirección longitudinal, está acompañado por una disminución en la dirección perpendicular. Por tanto, en este caso, disminuye la dimensión en sentido circular. La relación entre la deformación en sentido lateral y la en dirección a la carga se definió en el Capítulo 1 como relación de Poisson, representada por  $\mu$ . En consecuencia,

la deformación anterior  $\epsilon_t$  induce una deformación tangencial igual a  $-\mu\epsilon_t$  y si representamos la deformación por  $\epsilon_r$  tenemos  $\epsilon_r = -\mu pr/2Eh$ , tendiendo a decrecer el radio del cilindro, como indica el signo negativo.

Por consideraciones en un todo análogas a las hechas para el aumento de radio debido solamente a la carga radial, la disminución de radio correspondiente a la deformación  $\epsilon_r$  está dada por  $\frac{\mu}{2} \frac{pr^2}{Eh}$ . El aumento de radio total, debido a la presión interna  $p$ , es, pues,

$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh} - \frac{\mu}{2} \frac{pr^2}{Eh} = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

7. Considerar una envuelta esférica cerrada, de pared delgada, sometida a una presión interna uniforme  $p$ . El radio interior es  $r$  y el espesor de pared  $h$ . Deducir una expresión de la tensión de tracción que existe en la pared.

Para trazar el esquema de cuerpo en libertad consideremos la mitad de la esfera. Sobre este cuerpo actúa la presión interior aplicada  $p$ , así como las fuerzas que ejerce sobre ella la otra mitad suprimida. A causa de la simetría de cargas y deformaciones, estas fuerzas pueden representarse como tensiones de tracción tangentes  $\sigma_T$ , como se ve en el esquema adjunto.

Este diagrama de cuerpo en libertad representa las fuerzas que actúan en la semiesfera, mediante la proyección de ésta sobre un plano vertical. En realidad, la presión  $p$  actúa sobre toda la superficie interior de la semiesfera, en dirección perpendicular a la superficie, en cada punto; pero, como se dijo en el Problema 1, es admisible considerar la fuerza que ejerce esta misma presión  $p$  sobre la proyección de esa superficie, que en este caso es el área vertical circular representada por  $a \cdot a$ . Esto es posible porque la semiesfera es simétrica respecto al eje horizontal y las componentes verticales de la presión se anulan entre ellas. La tensión de tracción  $\sigma_T$  está producida solamente por las componentes de la presión paralelas al eje horizontal. Para que exista equilibrio, tenemos



$$\Sigma F_x = \sigma_T \cdot 2\pi r h - p\pi r^2 = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_T = \frac{pr}{2h}$$

Por simetría, esta tensión tangente es la misma en todas direcciones, en cualquier punto de la pared de la esfera.

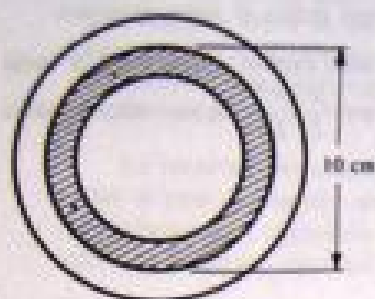
8. Un tanque esférico de 18 m de diámetro se utiliza para almacenar gas. La chapa de envuelta es de 12 mm de espesor y la tensión de trabajo del material de 1.250 kg/cm<sup>2</sup>. ¿Cuál es la máxima presión del gas  $p$  admisible?

Del Problema 7, la tensión de tracción es uniforme en todas las direcciones y está dada por

$$\sigma_T = \frac{pr}{2h} \quad \text{y, sustituyendo,} \quad 1.250 = \frac{p(900)}{2(1.2)} \quad \text{y} \quad p = 3.33 \text{ kg/cm}^2$$

9. Considerar un tanque de presión compuesto por dos cilindros delgados coaxiales, como se representa más adelante. En el estado anterior al montaje, hay una ligera «interferencia» entre las dos envueltas, esto es, la interior es demasiado grande para deslizarse dentro de la exterior. El cilindro exterior se calienta, se coloca sobre el interior y se le enfría, consiguiendo así un «ajuste por contracción». Si los dos son de acero y el diámetro medio del conjunto es de 10 cm, hallar las tensiones tangentes en cada envuelta, producidas por la «contracción», si la interferencia inicial (de los diámetros) era de 0,025 cm. El espesor de la pared interior es de 0,25 cm y el de la exterior 0,20 cm.

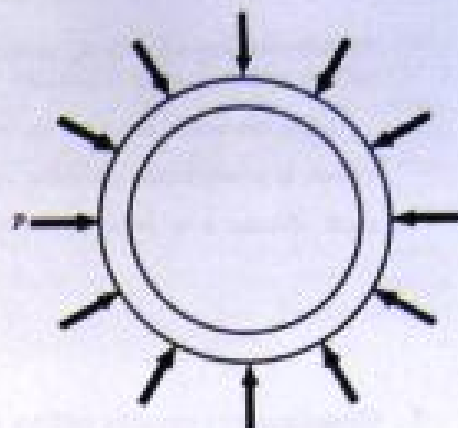
Evidentemente, hay una presión interfacial  $p$  entre las caras contiguas de las dos envueltas, como se ve en la figura.



TANQUE DE PRESION



CILINDRO EXTERIOR



CILINDRO INTERIOR

Hay que observar que no hay aplicadas cargas exteriores. Se puede considerar que la presión  $p$  aumenta el diámetro del cilindro exterior y disminuye el del interior, para que pueda encajar en el interior de aquél. En el Problema 6 se halló que la dilatación radial de un cilindro, debida a una presión radial  $p$ , era  $p r^2 / E h$ . En este problema no interviene ninguna fuerza longitudinal. El aumento del radio en la envuelta exterior debido a  $p$ , más la disminución del radio de la interior por la misma causa, debe ser igual a la interferencia inicial entre los radios, o sea,  $0,025/2$ . Así, pues, tenemos

$$\frac{p(5)^2}{(2,1 \times 10^6)(0,25)} + \frac{p(5)^2}{(2,1 \times 10^6)(0,2)} = 0,0125 \quad \text{o} \quad p = 117 \text{ kg/cm}^2$$

Esta presión, representada en las figuras de más arriba, actúa sobre los cilindros después de haber encajado el exterior sobre el interior. En el interior esta presión  $p$  da origen a una tensión

$$\sigma_r = \frac{p r}{h} = -\frac{117(5)}{0,25} = -2.340 \text{ kg/cm}^2$$

En el cilindro exterior la tensión tangente debida a la presión  $p$  es

$$\sigma_r = \frac{p r}{h} = -\frac{117(5)}{0,20} = -2.925 \text{ kg/cm}^2$$

Si, por ejemplo, el depósito está sometido a una presión interna uniforme, esas tensiones de «ajuste» se sumarían algebraicamente a las que se hallarían utilizando las fórmulas dadas en el Problema 1.

10. Como se ve en la figura, el cilindro delgado de acero ajusta exactamente sobre el cilindro interior de cobre. Hallar las tensiones tangentes en cada envuelta debidas a un aumento de temperatura de  $35^\circ \text{C}$ . No se considerarán los efectos producidos por la dilatación longitudinal que la acompaña. Esta disposición se usa a veces para almacenar líquidos corrosivos. Tomar

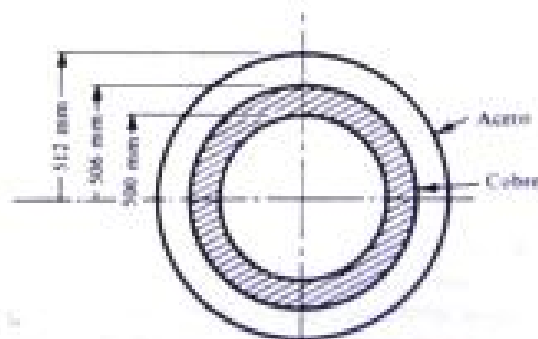
$$E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$E_c = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 17,7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

El método más sencillo es considerar primero que las dos envueltas están separadas una de otra y ya no están en contacto.

Debido al aumento de temperatura de  $35^\circ$ , la circunferencia del cilindro de acero aumenta

$$2\pi(50,9)(35)(11 \times 10^{-6}) = 0,123 \text{ cm}$$

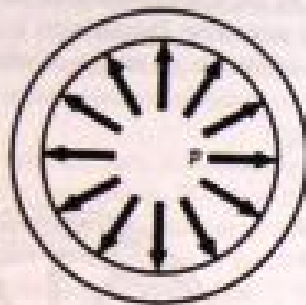


y la del cilindro de cobre.

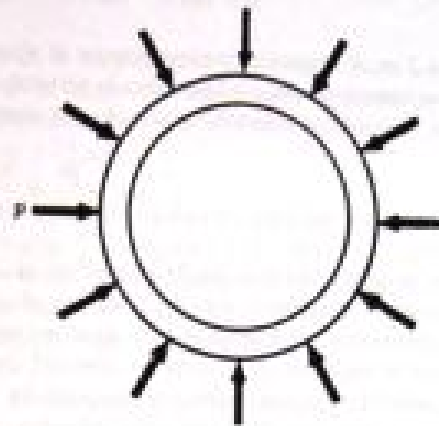
$$2\pi(50,3)(35)(17,7 \times 10^{-6}) = 0,196 \text{ cm}$$

Por lo que la «interferencia» entre los radios, esto es, la diferencia entre ellos (debida al calentamiento), es  $0,196 - 0,123 = 0,073$  cm. No hay cargas externas en ninguno de los cilindros.

Pero, según el enunciado del problema, las superficies contiguas de las dos envueltas están, indudablemente, en contacto después del aumento de temperatura, por lo que debe haber una presión interfacial  $p$  entre ellas, esto es, una presión que tienda a aumentar el radio del cilindro de acero y a disminuir el del cilindro de cobre para que éste ajuste dentro de aquél. En el esquema de cuerpo en libertad siguiente se representa esta presión.



CILINDRO DE ACERO



CILINDRO DE COBRE

En el Problema 6 se vio que la variación del radio de un cilindro a causa de una presión radial  $p$  (sin que actúen fuerzas longitudinales) es  $pr^2/Eh$ . Por tanto, el aumento de radio del cilindro de acero debido a  $p$ , sumado a la disminución del de cobre por la misma causa, debe ser igual a la «interferencia», o sea, que

$$\frac{p(50,9)^2}{(2,1 \times 10^8)(0,6)} + \frac{p(50,3)^2}{(9 \times 10^8)(0,6)} = 0,073 \quad \text{o} \quad p = 1,72 \text{ kg/cm}^2$$

Esta presión interfacial crea la continuidad necesaria en la superficie común de las dos envueltas, cuando están en contacto. Utilizando la fórmula de la tensión tangente  $\sigma_T = pr/h$ , hallamos que las del acero y el cobre son, respectivamente,

$$\sigma_a = \frac{1,72(50,9)}{0,6} = 146 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad \sigma_c = -\frac{1,72(50,3)}{0,6} = -144 \text{ kg/cm}^2$$

11. Considerar un cilindro de pared delgada de espesor 0,38 cm y diámetro de la envuelta 12 cm. El cilindro está reforzado por una capa de alambre de acero de diámetro 0,1 cm, devanado muy junto, con una tracción de 700 kg/cm<sup>2</sup> antes de que se aplique ninguna presión interna al cilindro. Determinar la tensión en el alambre y en el cilindro después de aplicar una presión interior radial uniforme de 35 kg/cm<sup>2</sup>.

Como la presión interior es totalmente radial, no hay tensiones en la dirección del eje del cilindro. La presión del alambre sobre la envuelta antes de la aplicación de la carga de 35 kg/cm<sup>2</sup> es equivalente a una presión radial uniforme, exterior,  $p$  que actúa en la envuelta. Es conveniente considerar una longitud de cilindro de un centímetro; como el alambre tiene 0,1 cm de diámetro, 10 vueltas contiguas de alambre refuerzan ese centímetro

de cilindro. En la figura adjunta se representa un diagrama de cuerpo en libertad de las 10 vueltas de alambre en contacto con un centímetro de longitud de cilindro. Solo se dibuja la mitad de cada vuelta, habiendo suprimido la otra mitad y sustituido su efecto por la tracción inicial en el cable, de  $700 \text{ kg/cm}^2$ . Indudablemente, no es conveniente dibujar la vuelta entera, porque no conduciría a ninguna relación entre  $p$  y la tracción inicial.

Sumando fuerzas verticalmente en el diagrama de cuerpo en libertad, y recordando que hay 10 vueltas de alambre en el único centímetro de longitud considerado, tenemos

$$\Sigma F_v = 12p - 10(2)(700) \frac{\pi}{4} (0.1)^2 = 0$$

con el factor 2 en el segundo término porque el alambre está cortado en los dos extremos de un diámetro. Obsérvese que se considera que  $p$  actúa sobre la proyección horizontal de la superficie. Despejando,  $p = 9.16 \text{ kg/cm}^2$ . Esta presión aplicada al cilindro produce una compresión tangente inicial en el mismo, dada por

$$\sigma_r = \frac{pr}{h} = \frac{9.16(6)}{0.38} = 145 \text{ kg/cm}^2$$

Si ahora se aplica la carga de  $35 \text{ kg/cm}^2$  en el interior del cilindro, la tensión tangente resultante  $\sigma$  es resistida por el cilindro y el arrollamiento conjuntamente. Esta tensión  $\sigma$  es igual en ambos, por lo que podemos dibujar el esquema de cuerpo en libertad que se acompaña, de la mitad superior de un centímetro de longitud de envuelta, reforzada por 10 vueltas de alambre. Para que haya equilibrio en la dirección vertical, tenemos

$$\Sigma F_v = 35(12)(1) - \sigma[2(0.38) + 2(10) \frac{\pi}{4} (0.1)^2] = 0$$

o  $\sigma = 460 \text{ kg/cm}^2$ , donde  $\sigma$  representa la tensión unitaria en el cilindro o en el arrollamiento de alambre.

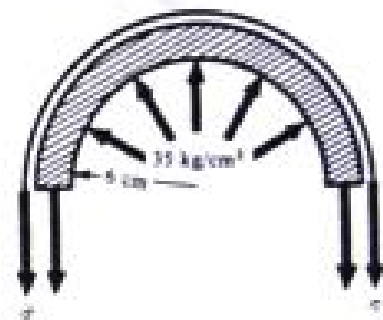
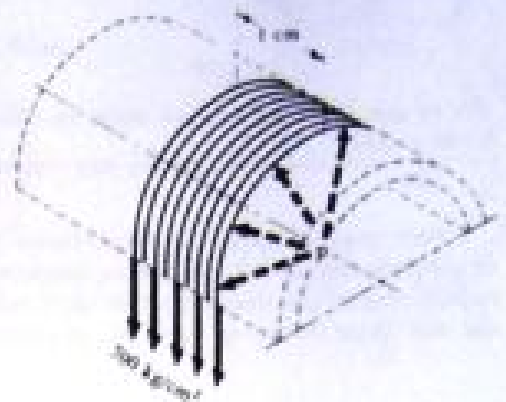
Por consiguiente, la tensión en la dirección tangente de la envuelta es

$$\sigma_1 = 460 - 145 = 315 \text{ kg/cm}^2$$

y la tensión final en el alambre,

$$\sigma_2 = 700 + 460 = 1,160 \text{ kg/cm}^2$$

Se halla fácilmente que la tensión tangente en el cilindro, sin arrollamiento de alambre, es de  $553 \text{ kg/cm}^2$ , lo que aclara el efecto de refuerzo de tal arrollamiento.





**RESISTENCIA DE ROTURA.** La ordenada del punto *B* se llama *resistencia de rotura* del material.

**MODULO DE RESILIENCIA.** El trabajo realizado en un volumen unidad de material, cuando se aumenta una fuerza de tracción simple gradualmente desde cero hasta un valor tal que se alcance el límite de proporcionalidad del material, se define como *módulo de resiliencia*. Puede calcularse por el área bajo la curva tensión-deformación desde el origen hasta el límite de proporcionalidad y se representa por la superficie rayada en la Fig. 5a. Las unidades en que se mide son  $\text{kg/cm}^2$ . Así, pues, la resiliencia de un material es su capacidad de absorber energía en la zona elástica.

**MODULO DE TENACIDAD.** El trabajo realizado en un volumen unidad de material, cuando se aumenta una fuerza de tracción simple gradualmente desde cero hasta el valor que produce la rotura, se define como *módulo de tenacidad*. Puede calcularse por el área total bajo la curva tensión-deformación desde el origen hasta la rotura. La tenacidad de un material es su capacidad de absorber energía en la zona plástica del material.

**ESTRICCION.** La relación entre la disminución del área de la sección transversal respecto a la primitiva en la fractura, dividida por el área *primitiva* y multiplicada por 100, se llama *estricción*. Hay que observar que cuando actúan fuerzas de tracción en una barra disminuye el área de la sección transversal, pero generalmente se hacen los cálculos de las tensiones en función del área primitiva, como en el caso de la Fig. 5a. Cuando las deformaciones se hacen cada vez mayores, se más interesante considerar los valores instantáneos del área de la sección transversal (que son decrecientes), con lo cual se obtiene la curva tensión-deformación *verdadera*, que tiene el aspecto de la línea de trazos de la Figura 5a.

**ALARGAMIENTO DE ROTURA.** La relación entre el aumento de longitud (de la longitud patrón) después de la fractura y la longitud inicial, multiplicada por 100, es el *alargamiento de rotura*. Se considera que tanto la estricción como el alargamiento de rotura son medidas de la *ductilidad* del material.

**TENSION DE TRABAJO.** Se pueden usar las características de resistencia que se acaban de mencionar para elegir la llamada *tensión de trabajo*. En este libro, todas las tensiones de trabajo estarán dentro de la zona elástica del material. Frecuentemente, esta tensión se determina simplemente dividiendo la tensión en la fluencia o rotura por un número llamado *coeficiente de seguridad*. La elección del coeficiente de seguridad se basa en el buen juicio y la experiencia del proyectista. A veces se especifican en los reglamentos de la construcción valores de determinados coeficientes de seguridad. Véanse los Problemas 4, 12 y 13.

La curva tensión-deformación no lineal de un material frágil, representada en la Fig. 5b, caracteriza otras varias medidas de la resistencia que no se pueden definir si la mencionada curva tiene una zona lineal. Estas son:

**LIMITE ELASTICO CONVENCIONAL.** La ordenada de la curva tensión-deformación para la cual el material tiene una deformación permanente predeterminada cuando se suprime la carga se llama *límite elástico convencional* del material. Se suele tomar como deformación permanente 0,002 o 0,0035 cm por cm; pero estos valores son totalmente arbitrarios. En la Fig. 5b se ha representado una deformación permanente  $\epsilon_1$  en el eje de deformaciones y se ha trazado la recta *O'Y* paralela a la tangente inicial a la curva. La ordenada de *Y* representa el límite elástico convencional del material, llamado a veces *tensión de prueba*.



## PROBLEMAS PROPUESTOS

12. Una botella cilíndrica de aire comprimido para usos de laboratorio lleva aproximadamente en el momento de la entrega una presión de  $160 \text{ kg/cm}^2$ . El diámetro exterior es de 25 cm. Calcular el espesor de pared necesario si el acero tiene un límite de fluencia de  $2450 \text{ kg/cm}^2$  y se acepta un coeficiente de seguridad 2.5.  
Sol. 204 cm
13. Para los distritos rurales, el gas combustible de uso doméstico se almacena frecuentemente en cilindros cerrados por extremos semiesféricos o elipsoidales. Considerar uno de esos tanques de 85 cm de diámetro fabricado con acero de límite de fluencia  $2100 \text{ kg/cm}^2$  y con espesor 1.2 cm. Tomando un coeficiente de seguridad 3, ¿cuál es la presión interior máxima que puede soportar el tanque? Sol.  $p = 19.7 \text{ kg/cm}^2$
14. Un cilindro de pared delgada está cerrado en los dos extremos y contiene aceite a una presión de  $8 \text{ kg/cm}^2$ . El diámetro interior es de 40 cm. Si el límite de fluencia del material es de  $2650 \text{ kg/cm}^2$  y se toma un coeficiente de seguridad 3, determinar el espesor de pared necesario. Sol. 0.181 cm
15. Un tanque vertical de almacenamiento de gasolina tiene 25 m de diámetro y está lleno hasta una altura de 12 m con gasolina de densidad 0.74. Si el límite de fluencia de la chapa del depósito es de  $2450 \text{ kg/cm}^2$  y se acepta un coeficiente de seguridad 2.5, calcular el espesor de pared necesario en el fondo del tanque, despreciando los efectos de momentos localizados en él. Sol.  $h = 1.13 \text{ cm}$
16. Un tanque esférico para almacenar gas bajo presión tiene 25 m de diámetro y está hecho con acero de estructuras de 16 mm de espesor. El límite de fluencia del material es  $2450 \text{ kg/cm}^2$  y se admite un coeficiente de seguridad 2.5. Determinar la máxima presión admisible, suponiendo que los cordones de soldadura entre las diversas placas son tan fuertes como el metal macizo. Determinar también la presión admisible si los cordones tienen el 75% de la resistencia del metal. Sol.  $p = 2.5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $p = 1.88 \text{ kg/cm}^2$
17. Para ayudar a los motoristas que tienen problemas de neumáticos, muchas estaciones de servicio llevan al lugar del accidente un pequeño tanque lleno de aire comprimido. Un tanque típico tiene 30 cm de diámetro y cuando está lleno lleva una presión de  $12 \text{ kg/cm}^2$ . El tanque es cilíndrico y está cerrado por extremos semiesféricos. Despreciando los efectos de flexión en la proximidad de la unión de esos dos elementos, calcular el espesor de pared necesario para el cilindro y para la esfera, basados en un coeficiente de seguridad 4. Suponer un límite de fluencia  $2100 \text{ kg/cm}^2$  para la chapa de acero. Sol. Cilindro  $h = 0.34 \text{ cm}$ , esfera  $h = 0.17 \text{ cm}$
18. Calcular el aumento de radio de la envuelta esférica mencionada en el Problema 7, debido a la presión interna.  
Sol.  $\Delta r = \frac{pr^2}{2Eh}(1 - \mu)$
19. Deducir una expresión para el aumento unitario de volumen de un cilindro circular de pared delgada sometido a una presión interna uniforme  $p$ . Los extremos del cilindro están cerrados por placas circulares. Suponer que la dilatación radial es constante en toda la longitud.  
Sol.  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{Eh} \left( \frac{5}{2} - 2\mu \right)$
20. Calcular el aumento por unidad de volumen de un cilindro circular de acero, de pared delgada, cerrado en ambos extremos y sometido a una presión interior uniforme de  $5.5 \text{ kg/cm}^2$ . El espesor de pared es de 1.6 mm, el radio 35 cm y  $\mu = 1/3$ . Considerar  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Sol.  $\Delta V/V = 1.05 \times 10^{-3}$
21. Considerar un cilindro laminado constituido por una envuelta delgada de acero «encajada» sobre una de aluminio. El espesor de cada una de ellas es de 0.25 cm y el diámetro medio del conjunto 10 cm. La «interferencia» inicial de las dos envueltas antes de la unión es de 0.01 cm medida sobre un diámetro. Hallar la tensión tangencial en cada cilindro producida por el «ajuste por contracción». Para el aluminio,  $E = 7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , y para el acero,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Sol.  $\sigma_a = 525 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_d = -525 \text{ kg/cm}^2$

## CAPITULO 4

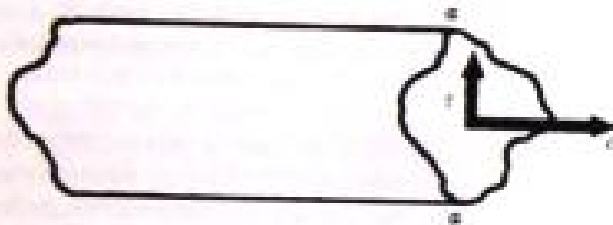
### Tensiones de cortante

**DEFINICION DE ESFUERZO CORTANTE.** Si se hace pasar un plano a través de un cuerpo, una fuerza que actúa a lo largo del plano se llama esfuerzo cortante. Se representará por  $T$ .

**DEFINICION DE TENSION CORTANTE.** El esfuerzo cortante, dividido por la superficie sobre la que actúa, se llama tensión cortante. La representaremos por  $\tau$ . Por tanto,

$$\tau = \frac{T}{A}$$

**COMPARACION DE LAS TENSIONES CORTANTE Y NORMAL.** Consideremos una



barra cortada por un plano  $a-a$  perpendicular a su eje, como se ve en la figura adjunta. Una tensión normal  $\sigma$  es perpendicular a este plano. Es el tipo de tensión considerado en los Capítulos 1, 2 y 3.

Una tensión cortante es la que actúa *a lo largo* del plano, como la  $\tau$  indicada. Por tanto, la diferencia entre las tensiones normales y cortantes es la *dirección*.

**HIPOTESIS.** Es necesario hacer alguna hipótesis referente al modo en que se distribuyen las tensiones cortantes y, a falta de un conocimiento más preciso, en todos los problemas de este capítulo se tomarán como uniformes. Por ello, la expresión  $\tau = T/A$  indica una tensión cortante media en la superficie.

**APLICACIONES.** Ejemplos comunes de sistemas que contienen tensiones cortantes son las uniones roblonadas (Problema 7), las probetas de ensayo de madera (Problema 5) y las chavetas usadas para bloquear las poleas a los ejes (Problema 8).

**DEFORMACIONES DEBIDAS A TENSIONES CORTANTES.** Consideremos la deformación de un elemento plano rectangular cortado de un sólido, en el que se sabe que las fuerzas que actúan son tensiones cortantes  $\tau$ , en la dirección representada en la Figura (a).

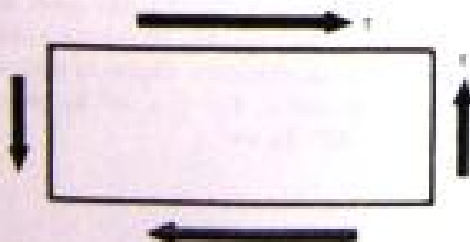


Fig. (a)

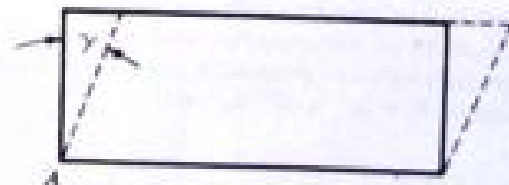


Fig. (b)

Se supone que las caras del elemento paralelas al plano del papel están exentas de carga. Como no actúan tensiones normales en el elemento, las longitudes de los lados del rectángulo elemental original no variarán cuando las tensiones cortantes adopten el valor  $\tau$ . Sin embargo, habrá una distorsión de los ángulos del elemento primitivamente *rectos*, después de cuya distorsión, debida a las tensiones cortantes, el elemento adopta la configuración representada por líneas de trazos en la Fig. (b) anterior.

**DEFORMACION POR CORTANTE.** La variación del ángulo  $A$  del elemento se define como deformación por cortante. Se mide en radianes y se suele representar por  $\gamma$ .

**MODULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE.** La relación de la tensión cortante  $\tau$  a la deformación  $\gamma$  se llama módulo de elasticidad en cortante y se suele representar por  $G$ . Así, pues,

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

A  $G$  se le conoce también por *módulo de rigidez* y por *coeficiente de elasticidad transversal*.

Las unidades de  $G$  son las mismas que las de la tensión cortante, esto es,  $\text{kg/cm}^2$ , pues la deformación por cortante no tiene dimensión. La determinación experimental de  $G$  y la región de comportamiento lineal de  $\tau$  y  $\gamma$  se estudiarán en el Capítulo 5. Igual que en el Capítulo 1 se dibujaron diagramas tensión-deformación para cargas normales, se pueden trazar esos diagramas para esfuerzos cortantes y diversos materiales. El aspecto general es el mismo de los del Capítulo 1, pero los valores representados son, naturalmente, diferentes.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar la unión atornillada de la Fig. (a) que sigue. La fuerza es de 3.000 kg y el diámetro del perno de 1,2 cm. Determinar el valor medio de las tensiones cortantes que existen en cada uno de los planos  $a-a$  o  $b-b$ .

Como no tenemos más datos, podemos suponer que la fuerza  $P$  está repartida por igual entre las secciones  $a-a$  y  $b-b$ , por lo que actúa una fuerza de  $3.000/2 = 1.500$  kg, según cada uno de estos planos, sobre una sección de  $\frac{1}{2}\pi(1,2)^2 = 1,13$   $\text{cm}^2$ .

Por tanto, la tensión cortante media en cada uno de los planos es  $\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{1.500}{1,13} = 1.330$   $\text{kg/cm}^2$ .

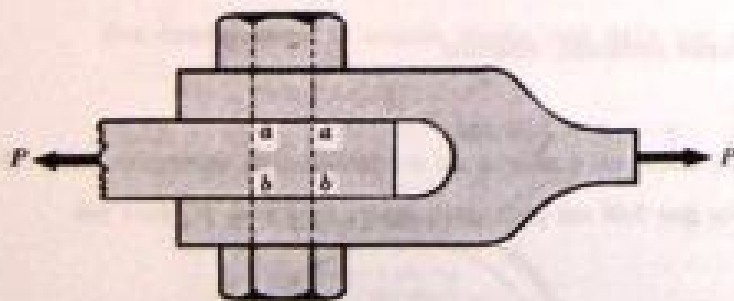


Fig. (a)

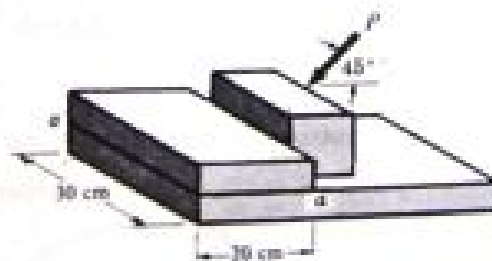


Fig. (b)

2. Con referencia a la Fig. (b), la fuerza  $P$  tiende a cortar el tope  $a$  lo largo del plano  $a-a$ . Si  $P = 4.000$  kg, determinar la tensión cortante media en el plano  $a-a$ .

Para producir esta tensión cortante solo interviene la componente horizontal de  $P$ , que está dada por

Por tanto, la tensión cortante media en el plano  $a-a$  es  $\tau = \frac{P \cos 45}{A} = \frac{2.825}{30(20)} = 4.7 \text{ kg/cm}^2$ .

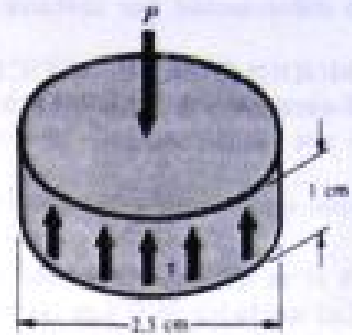
3. El acero de estructuras, de bajo contenido en carbono, tiene una tensión de rotura a cortante de  $3.100 \text{ kg/cm}^2$ . Determinar la fuerza  $P$  necesaria para punzonar un agujero de  $2.5 \text{ cm}$  de diámetro en una chapa de  $1 \text{ cm}$  de espesor de ese acero. Si el módulo de elasticidad en cortante para este material es  $8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , hallar la deformación por cortante en el borde del agujero cuando la tensión cortante es de  $1.500 \text{ kg/cm}^2$ .

Supondremos una distribución uniforme de cortantes en una superficie cilíndrica de  $2.5 \text{ cm}$  de diámetro y  $1 \text{ cm}$  de espesor, como se ve en el esquema adjunto. Para que haya equilibrio es necesario que la fuerza  $P$  valga

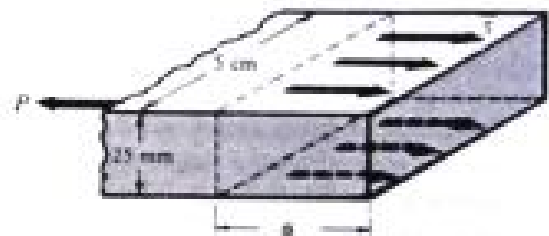
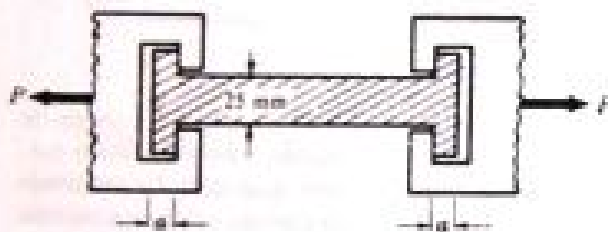
$$P = \tau A = \pi(2.5)(1)(3.100) = 24.300 \text{ kg}$$

Para determinar la deformación por cortante  $\gamma$ , cuando la tensión cortante  $\tau$  es de  $1.500 \text{ kg/cm}^2$ , emplearemos la definición  $G = \tau/\gamma$ , obteniendo

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1.500}{840.000} = 0.00178 \text{ radianes}$$



4. Considerar la probeta rectangular de la figura, de sección  $2.5 \times 5 \text{ cm}$ , que se usa a veces para determinar la resistencia a tracción de la madera. Para el roble albar, que tiene una carga de rotura a cortante paralela a la fibra de  $65 \text{ kg/cm}^2$ , determinar la mínima longitud de probeta que debe haber en la mordaza  $a$  para que no se produzca un fallo por cortante en ella antes de la rotura a tracción de la probeta. La fractura a tracción tiene lugar para una carga  $P$  de  $3.300 \text{ kg}$ .



Las tensiones cortantes actúan como se ve en la figura, sobre la superficie del extremo derecho, así como otra del extremo izquierdo de la probeta.

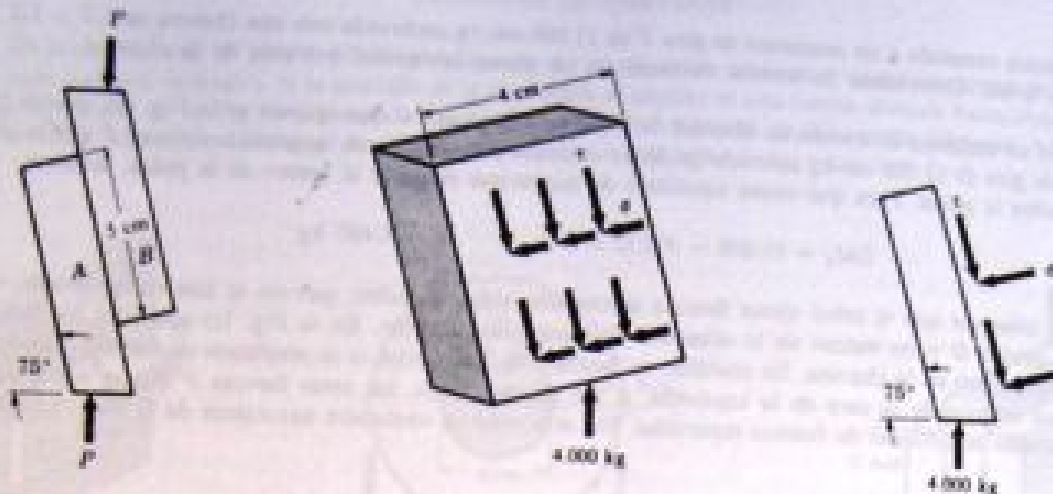
Suponiendo una distribución uniforme de las tensiones cortantes, tenemos

$$\tau = \frac{P}{A}, \quad 65 = \frac{3.300}{2(5)(a)} \quad \text{y} \quad a = 5,08 \text{ cm}$$

Naturalmente, la longitud de las mordazas será mayor que  $5,08 \text{ cm}$  para estar seguro de que se produce primero la rotura a tracción.

5. En la industria de la madera se usan a veces tacos inclinados de madera para determinar la resistencia a *cortante-compresión* de las uniones encoladas. Considerar el par de tacos encolados  $A$  y  $B$  que tienen un espesor de  $4 \text{ cm}$  en la dirección perpendicular al plano del papel. Determinar la carga de rotura a cortante del encolado si se necesita una fuerza vertical de  $4.000 \text{ kg}$  para producir la rotura del ensamble. Es de observar que una buena unión encolada hace que una gran proporción de las roturas se produzcan en la madera.

Consideremos el equilibrio del taco inferior  $A$ . La reacción del taco superior  $B$  sobre el inferior consiste en fuerzas normales y de corte que aparecen como en la perspectiva y la vista ortogonal representadas.



Con referencia al croquis de la derecha, vemos que para que haya equilibrio en la dirección horizontal

$$\Sigma F_x = \tau(5)(4) \cos 75^\circ - \sigma(5)(4) \cos 15^\circ = 0 \quad \text{o} \quad \sigma = 0,268\tau$$

Para que exista equilibrio en la dirección vertical, tenemos

$$\Sigma F_y = 4.000 - \tau(5)(4) \sin 75^\circ - \sigma(5)(4) \sin 15^\circ = 0$$

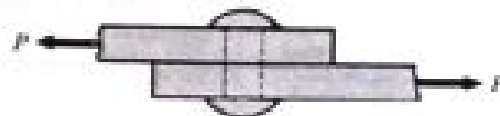
Sustituyendo  $\sigma = 0,269\tau$  y despejando, hallamos  $\tau = 193 \text{ kg/cm}^2$ .

6. La tensión cortante es de  $1.050 \text{ kg/cm}^2$  en una pieza de acero de estructuras. Si el módulo de rigidez  $G$  es  $840.000 \text{ kg/cm}^2$ , hallar la deformación por cortante  $\gamma$ .

Por definición,  $G = \frac{\tau}{\gamma}$  por lo que  $\gamma = \frac{1.050}{840.000} = 0,00125$  radianes.

7. Para unir dos placas se utiliza un solo roblón, como se ve en la figura. Si el diámetro del roblón es de 2 cm y la carga  $P$  de 3.000 kg, ¿cuál es la tensión de cortante media producida en el roblón?

Aquí, la tensión cortante media en el roblón es  $P/A$ , donde  $A$  es la sección de éste.



Por consiguiente, la tensión media está dada por  $\tau = \frac{3.000}{\frac{\pi}{4}(2)^2} = 955 \text{ kg/cm}^2$ .

8. Habitualmente, se unen entre sí los árboles y las poleas por medio de una chaveta, como se ve en la Fig. (a). Con-

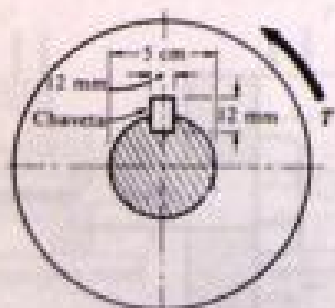


Fig. (a)

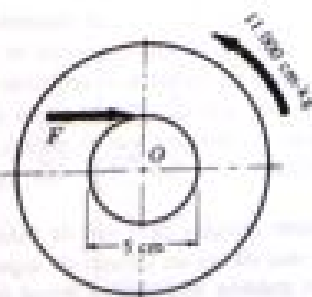


Fig. (b)

Considerar una polea sometida a un momento de giro  $T$  de 11.000 cm-kg enclavada con una claveta de  $1,2 \times 1,2 \times 7,5$  cm a un árbol. Determinar la tensión cortante en un plano horizontal a través de la claveta.

Trazando un esquema de cuerpo en libertad de la polea sola, como el que aparece en la Fig. (b), vemos que el momento de giro de 11.000 cm-kg aplicado ha de ser resistido por una fuerza tangente horizontal  $F$  que la claveta ejerce sobre la polea. Para que exista equilibrio de momentos respecto al centro de la polea, tenemos

$$\Sigma M_o = 11.000 - F(2,5) = 0 \quad \circ \quad F = 4.400 \text{ kg}$$

Hay que observar que el árbol ejerce fuerzas adicionales sobre la polea, que no se han representado, que actúan en el centro  $O$  y no entran en la ecuación de momentos anterior. En la Fig. (c) aparecen las fuerzas resultantes que actúan en la claveta. En realidad, la fuerza  $F$  de la derecha es la resultante de fuerzas repartidas sobre la mitad inferior de la cara de la izquierda, y, del mismo modo, las otras fuerzas  $F$  que se representan son las resultantes de sistemas de fuerzas repartidas. No se conoce la verdadera naturaleza de la distribución de fuerzas.

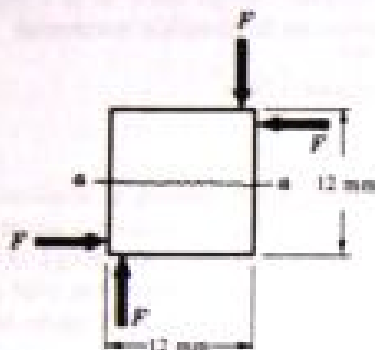


Fig. (c)

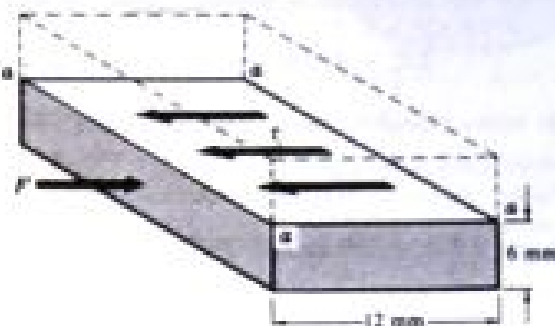


Fig. (d)

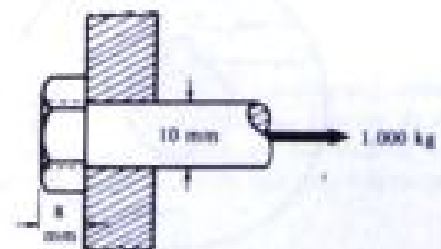
En la Fig. (d) se muestra el diagrama de cuerpo en libertad de la parte de claveta bajo un plano horizontal  $a-a$  trazado por su sección media. Para que exista equilibrio en la dirección horizontal, tenemos

$$\Sigma F_x = 4.400 - \tau(1,2)(7,5) = 0 \quad \circ \quad \tau = 490 \text{ kg/cm}^2$$

Esta es la tensión cortante horizontal en la claveta.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

9. En el Problema 1, si la carga máxima de trabajo a cortante admisible es de  $1.000 \text{ kg/cm}^2$ , determinar el diámetro del perno necesario para no exceder de este valor. Sol.  $d = 1,38 \text{ cm}$
10. Considerar un perno de acero de 1 cm de diámetro y sometido a una carga de tracción axial de 1.000 kg, como se representa en el esquema adjunto. Determinar la tensión cortante media en la cabeza del perno suponiendo que el cortante actúa sobre una superficie cilíndrica del mismo diámetro que el perno, como se indica por las líneas de trazos. Sol.  $\tau = 400 \text{ kg/cm}^2$
11. Se ha usado un punzón circular de 2 cm de diámetro para punzonar un agujero en una chapa de 12 mm de espesor. Si la fuerza necesaria para que el punzón atravesara el metal fue de 30.000 kg, determinar la tensión cortante máxima producida en el material. Sol.  $\tau = 4.000 \text{ kg/cm}^2$



12. En las estructuras se usan muchas veces apoyos de angulares de acero para transferir cargas de vigas horizontales a pilares verticales. Si la reacción de la viga sobre el angular es una fuerza, dirigida hacia abajo, de 5.000 kg, como se ve en la Fig. (a), y si esta fuerza la resisten dos roblones de 2.2 cm de diámetro, hallar la tensión cortante media en cada uno de ellos. Sol.  $\tau = 660 \text{ kg/cm}^2$

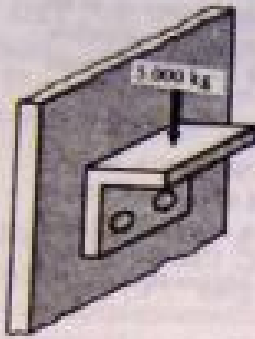


Fig. (a) Prob. 12

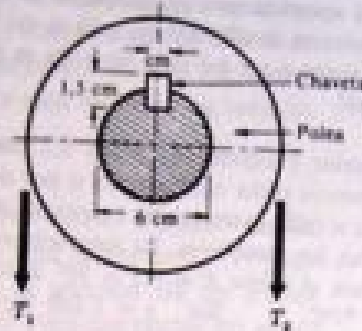


Fig. (b) Prob. 13

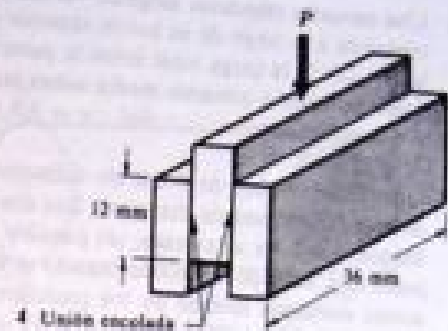


Fig. (c) Prob. 14

13. Una polea está enclavada (para evitar el movimiento relativo) a un árbol de 6 cm de diámetro. Los empujes  $T_1$  y  $T_2$ , diferentes, de la correa sobre los dos lados de la polea dan origen a un momento de giro de 1.300 kg-cm. La chaveta tiene una sección de  $1 \times 1.5 \text{ cm}$  y 7.5 cm de longitud, como se ve en la Fig. (b). Determinar la tensión cortante media en un plano horizontal por la chaveta. Sol.  $\tau = 60 \text{ kg/cm}^2$
14. Muchas veces se usa el dispositivo de la Fig. (c) para determinar la resistencia a cortante de una unión encolada. Si la carga  $P$  en la rotura es de 1.200 kg, ¿cuál es la tensión cortante media en la unión en este instante? Sol.  $\tau = 140 \text{ kg/cm}^2$
15. La Fig. (d) representa otro tipo de dispositivo para determinar resistencias a cortante de probetas cilíndricas. La probeta se sujeta entre los tacos  $A_1, A_2$  y  $B_1, B_2$  y se aplica una fuerza  $P$  dirigida hacia abajo en el taco  $C$ . ¿Qué fuerza hay que aplicar para romper una barra redonda de acero laminado en caliente de 20 mm de diámetro y que tiene una resistencia última a cortante de  $7.300 \text{ kg/cm}^2$ ? Sol.  $P = 46.000 \text{ kg}$
16. Considerar la estructura de balcón de la Fig. (e). El balcón horizontal está cargado con una carga total de 10.000 kg, repartida de un modo simétrico radialmente. El apoyo central es una columna de 50 cm de diámetro y el voladizo está soldado a las superficies superior e inferior de la columna con soldaduras de 11 mm de lado, como se ve en la vista ampliada de la derecha. Determinar las tensiones cortantes medias que existen en la columna y la soldadura. Sol.  $29 \text{ kg/cm}^2$

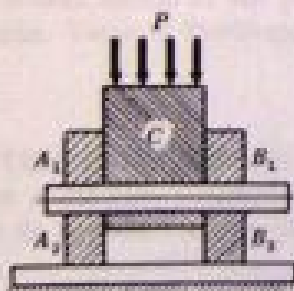


Fig. (d) Prob. 15

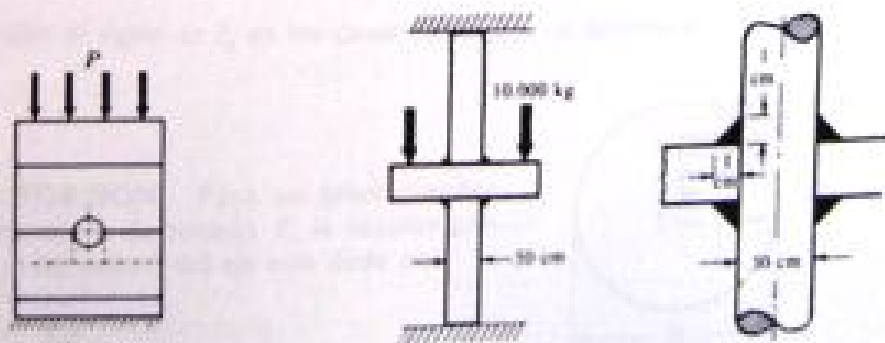


Fig. (e) Prob. 16



17. En algunas armaduras de puentes o de cubiertas, las diagonales, los montantes verticales y los cordones horizontales, están unidos entre sí mediante pasadores. Considerar la disposición de barras paralelas representadas en la Fig. (a), unidas entre sí por un pasador de acero de 15 cm de diámetro. Si la tracción en cada barra es de 100.000 kg, determinar la tensión cortante media en el pasador. Calcular, además, la deformación correspondiente a esa tensión cortante si  $G = 8,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Sol.  $\tau = 565 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\gamma = 0,00067$
18. Una envuelta cilíndrica delgada, vertical, de 38 m de diámetro, está cargada con una sobrecarga uniformemente repartida a lo largo de su borde superior y está apoyada solo parcialmente en su extremo inferior, como se ve en la Fig. (b). Si la carga total sobre la parte superior es de 450.000 kg, y 24 m del borde inferior no están apoyados, hallar la tensión cortante media sobre las secciones a-a y b-b si la envuelta es de hormigón, de 20 cm de espesor y 6,5 m de altura. Sol.  $\tau = 3,5 \text{ kg/cm}^2$
19. Un tubo de cobre de 5 cm de diámetro exterior y espesor de pared 6,5 mm ajusta sobre una barra circular de acero de 36 mm de diámetro. Los dos elementos están unidos entre sí por dos pasadores de metal de 8 mm de diámetro que les atraviesan, un pasador junto a cada extremo del conjunto. A la temperatura ambiente, el conjunto está libre de tensiones cuando se colocan los pasadores. La temperatura se eleva  $40^\circ \text{ C}$ . Calcular las tensiones cortantes medias en los pasadores. Para el cobre  $E = 9,1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^\circ \text{ C}$ ; para el acero  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ \text{ C}$ . Sol.  $\tau = 1.330 \text{ kg/cm}^2$

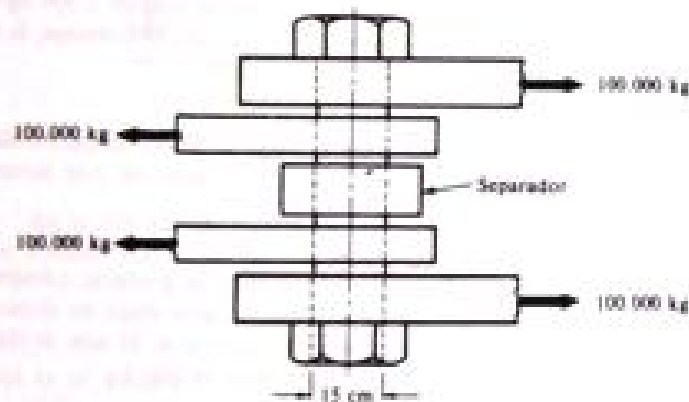


Fig. (a) Prob. 17

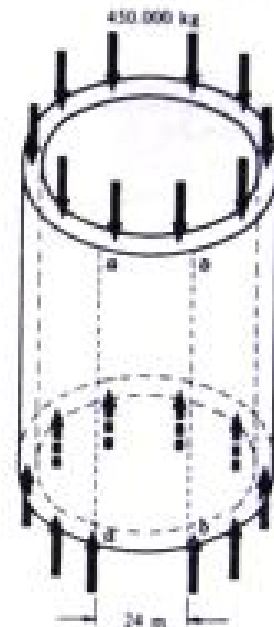
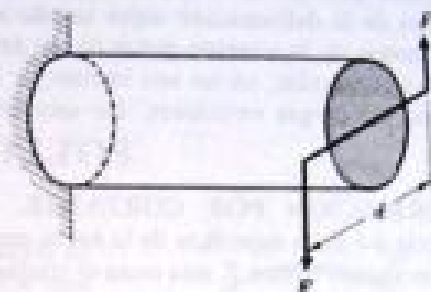


Fig. (b) Prob. 18

## Torsión

**DEFINICION DE TORSION.** Consideremos una barra sujeta rigidamente en un extremo y sometida en el otro a un par  $T (= Fd)$  aplicado en un plano perpendicular al eje, como se ve en la figura. Se dice que esa barra está sometida a torsión.



**EFFECTOS DE LA TORSION.** Los efectos de la aplicación de una carga de torsión a una barra son: (1) producir un desplazamiento angular de la sección de un extremo respecto al otro y (2) originar tensiones cortantes en cualquier sección de la barra perpendicular a su eje.

**MOMENTO TORSOR.** A veces, a lo largo de un eje actúan una serie de pares. En este caso, es conveniente introducir un nuevo concepto, el *momento torsor*, que se define para cada sección de la barra, como la suma algebraica de los momentos de los pares aplicados, situados a un lado de la sección considerada. Naturalmente, la elección de lado es arbitraria en cada caso.

**MOMENTO POLAR DE INERCIA.** Para un árbol circular hueco de diámetro exterior  $D_o$  con un agujero circular concéntrico de diámetro  $D_i$ , el momento polar de inercia de la sección representado generalmente por  $I_p$  está dado por

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4)$$

El momento polar de inercia de un árbol macizo se obtiene haciendo  $D_i = 0$ . Véase Problema 1.

Este número  $I_p$  es simplemente una característica geométrica de la sección. No tiene significado físico, pero aparece en el estudio de las tensiones que se producen en un eje circular sometido a torsión.

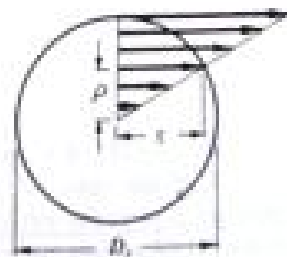
A veces es conveniente escribir la ecuación anterior en la forma

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D_o^2 + D_i^2)(D_o^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{32}(D_o^2 + D_i^2)(D_o + D_i)(D_o - D_i)$$

Esta última forma es útil para calcular el valor de  $I_p$  en los casos en los que la diferencia  $(D_o - D_i)$  es pequeña. Véase el Problema 9.

**TENSION CORTANTE DE TORSION.** Para un árbol circular, hueco o macizo, sometido a un momento de torsión  $T$ , la tensión cortante de torsión  $\tau$  a una distancia  $\rho$  del centro del eje está dada por

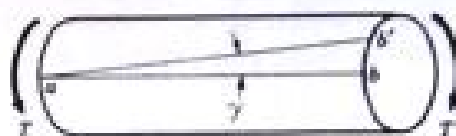
$$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$$



La deducción de esta ecuación se verá en detalle en el Problema 2. Para aplicaciones, véanse los Problemas 5, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 18. Esta distribución de tensiones varía desde cero en el centro del árbol (si es macizo) hasta un máximo en las fibras exteriores, como se ve en la figura anterior. Aquí estudiaremos solo la torsión de árboles macizos o huecos de sección circular.

**HIPOTESIS.** Para deducir la fórmula  $\tau = T\rho/I_p$ , se supone que una sección del árbol normal a su eje, plana antes de la carga, permanece plana después de aplicar el par y que un diámetro de la sección antes de la deformación sigue siendo un diámetro, o recta, de la sección después de la deformación. A causa de la simetría polar de un árbol circular, estas hipótesis parecen razonables; pero si la sección no es circular, ya no son ciertas; se sabe, por experiencias, que en este último caso, durante la aplicación de cargas exteriores, las secciones se alabean.

**DEFORMACION POR CORTANTE.** Si se marca una generatriz  $a-b$  en la superficie de la barra sin carga, y luego se aplica el momento torsor  $T$ , esta recta se traslada a  $a-b'$ , como se ve en la figura. El ángulo  $\gamma$ , medido en radianes, entre las posiciones inicial y final de la generatriz, se define como la deformación por cortante en la superficie de la barra. La misma definición sirve para cualquier punto interior de la misma.



**MODULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE.** La relación entre la tensión cortante  $\tau$  y su deformación  $\gamma$  se llama módulo de elasticidad en cortante  $G$ , como en el Capítulo 4, está dado por

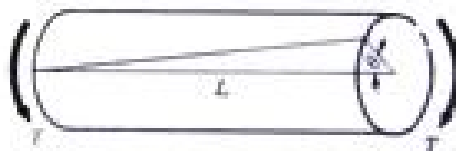
$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Como allí, las unidades de  $G$  son las mismas que las de la tensión cortante, pues la deformación no tiene dimensión.

**ANGULO DE TORSION.** Si un árbol de longitud  $L$  está sometido a un momento de torsión constante  $T$  en toda su longitud, el ángulo  $\theta$  que un extremo de la barra gira respecto del otro, es

$$\theta = \frac{TL}{GI_p}$$

donde  $I_p$  representa el momento polar de inercia de la sección. Esta ecuación se deduce en el Problema 3. Para aplicaciones, véanse los Problemas 8, 11-17.



**MODULO DE ROTURA** es la tensión cortante ficticia que se obtiene sustituyendo en la ecuación  $\tau = T\rho/I_p$  el par máximo  $T$  que soporta un árbol cuando se ensaya a rotura. En este caso, se toma para valor de  $\rho$  el radio exterior de la barra. Indudablemente, no está justificado el uso de esta fórmula en el punto de rotura, porque, como podrá verse en el Problema 2, se deduce solo para utilizarla dentro de la zona de comportamiento lineal del material. La tensión obtenida utilizando esta fórmula en este caso no es una verdadera tensión, pero a veces es útil para comparaciones.

**PROBLEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS.** Frecuentemente se presenta este tipo de problemas en el caso de cargas de torsión. Un ejemplo es un árbol compuesto de dos materiales: un tubo de un material que rodea a otro tubo o a una barra maciza de material distinto, estando sometido el conjunto a un momento torsor. Como siempre, las ecuaciones de la estática aplicables han de ser suplementadas con otras basadas en las deformaciones de la estructura, para tener igual número de ellas que de incógnitas. En este caso, las incógnitas serían los momentos torsores que soporta cada material. La ecuación basada en las deformaciones establecería que los ángulos de giro de los distintos materiales son iguales. (Véanse los Problemas 15-17.)

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir una expresión del momento polar de inercia de la sección de un árbol circular hueco. ¿En qué se convierte esta expresión en el caso particular de un eje circular macizo?

Sea  $D_2$  el diámetro exterior del árbol y  $D_1$  el interior. A causa de la simetría circular es preferible utilizar coordenadas polares, como en la figura.

Por definición, el momento polar de inercia está dado por la integral

$$I_p = \int_A \rho^2 da$$

donde  $A$  indica que hay que calcular la integral sobre toda la sección.

Para calcular esta integral es mejor elegir un elemento de superficie,  $da$ , tal que  $\rho$  sea constante en todos los puntos del mismo. Una elección apropiada es el anillo elemental de radio  $\rho$  y espesor radial  $d\rho$ . Se supone que el espesor  $d\rho$  del anillo es pequeño comparado con  $\rho$ . El área del elemento anular está dada por  $da = 2\pi\rho d\rho$ , por lo que el momento polar de inercia es

$$I_p = \int_{1/2 D_1}^{1/2 D_2} \rho^2 (2\pi\rho) d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_{1/2 D_1}^{1/2 D_2} = \frac{\pi}{32} (D_2^4 - D_1^4)$$

Las unidades son, evidentemente, (longitud)<sup>4</sup>, esto es, cm<sup>4</sup>. No es necesario intentar atribuir ningún significado físico a esta cantidad,  $I_p$ . Se verá que es útil en los problemas que tratan de la torsión de árboles.

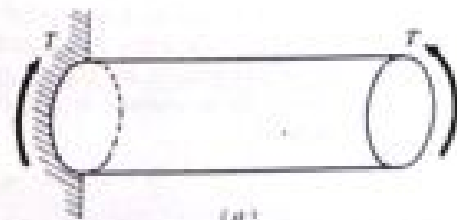
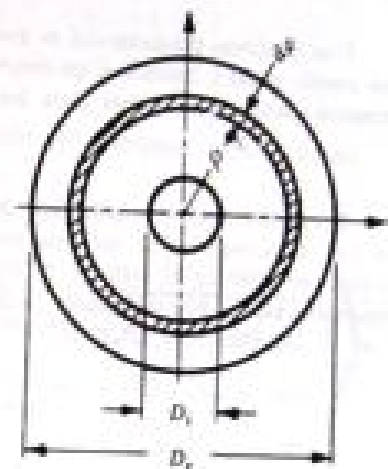
Para el caso particular de un árbol circular macizo, la expresión anterior se convierte en

$$I_p = \frac{\pi}{32} D^4$$

donde  $D$  representa el diámetro del árbol.

2. Deducir una expresión de la relación entre el momento torsor aplicado a un árbol de sección circular y la tensión cortante en un punto cualquiera del mismo.

En la figura se ha representado el árbol cargado por dos pares  $T$  y, por consiguiente, en equilibrio estático. Para determinar la distribución de tensiones cortantes, cortemos el árbol por un plano perpendicular a su eje geométrico, y supongamos que este



**MODULO TANGENTE.** A la pendiente de la tangente a la curva tensión-deformación en el origen se la conoce por *módulo tangente del material*.

Hay otras características de un material que son útiles para los proyectos, que son las siguientes:

**COEFICIENTE DE DILATACION LINEAL.** Se define como la variación por unidad de longitud de una barra recta sometida a un cambio de temperatura de un grado. El valor de este coeficiente es independiente de la unidad de longitud, pero depende de la escala de temperatura empleada. Consideraremos la escala centígrada, para la cual el coeficiente que se representa por  $\alpha$  es para el acero, por ejemplo,  $11 \times 10^{-6}$  por  $^{\circ}\text{C}$ . Las variaciones de temperatura en una estructura dan origen a tensiones internas del mismo modo que las cargas aplicadas. Véanse los Problemas 5 y 8.

**RELACION DE POISSON.** Cuando una barra está sometida a una carga de tracción simple se produce en ella un aumento de longitud en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares a ésta. La relación entre la deformación en la dirección lateral y la de la dirección axial se define como *relación de Poisson*. La representaremos por la letra griega  $\mu$ . Para la mayoría de los metales está entre 0,25 y 0,35. Véanse los Problemas 16, 17, 18, 19 y 20.

**FORMA GENERAL DE LA LEY DE HOOKE.** Se ha dado la forma simple de la ley de Hooke para tracción axial cuando la carga está totalmente según una recta, esto es, es uniaxial. Se consideró solamente la deformación en la dirección de la carga y se dijo que era

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

En el caso más general, un elemento de material está sometido a tres tensiones normales perpendiculares entre sí,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , acompañadas de tres deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ , respectivamente. Superponiendo las componentes de la deformación originada por la contracción lateral debida al efecto de Poisson a las deformaciones directas, obtenemos el enunciado general de la ley de Hooke:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \text{Véanse los Problemas 17 y 20.}$$

## CLASIFICACION DE LOS MATERIALES

Toda la discusión se ha basado en la suposición de que prevalecen en el material dos características, esto es, que tenemos un

**MATERIAL HOMOGENEO**, que tiene las mismas propiedades elásticas ( $E$ ,  $\mu$ ) en todos los puntos del cuerpo, y un

**MATERIAL ISOTROPO**, que tiene las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones en cada punto del cuerpo. No todos los materiales son isotrópicos. Si un material no tiene ninguna clase de simetría elástica se llama *anisótropo* o, a veces, *ortotrópico*. En lugar de tener dos constantes elásticas independientes ( $E$ ,  $\mu$ ) como un material isotrópico, esta sustancia tiene 21 constantes elásticas. Si

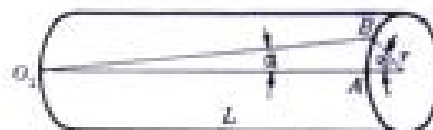
plano no está demasiado cerca de ningún extremo, donde están aplicados los esfuerzos  $T$ . El empleo de ese plano está de acuerdo con el método usado normalmente en resistencia de materiales, que consiste en cortar el cuerpo de modo que las fuerzas a estudiar resulten exteriores al nuevo que se forma. Estas fuerzas (o tensiones) eran, naturalmente, efectos internos respecto al cuerpo original, no cortado.

El esquema de cuerpo en libertad de la parte del árbol situada a la izquierda del plano aparece como se muestra en la figura adjunta. Indudablemente, debe actuar un par  $T$  sobre la sección cortada por el plano ya que por estar todo el árbol en equilibrio debe estarlo cualquier parte de él. El par  $T$  que actúa en la sección del corte representa el efecto de la parte derecha del árbol sobre la izquierda, pues al suprimir dicha parte derecha hay que sustituirla por su efecto sobre el resto. Este par es, indudablemente, la resultante de las tensiones cortantes repartidas en la sección. Ahora es necesario hacer ciertas hipótesis para determinar su distribución.



Una hipótesis fundamental es que una sección plana del árbol normal a su eje antes de aplicar las cargas sigue siendo plana y normal al eje después de aplicarlas. Para los árboles circulares puede comprobarse experimentalmente, pero no es válida para las secciones no circulares.

Una generatriz de la superficie del árbol, como la  $O_1A$  de la figura que se acompaña, se deforma hasta tomar la configuración  $O_1B$  cuando se produce la torsión. El ángulo entre las dos posiciones se representa por  $\alpha$ . Por definición, la deformación unitaria por cortante  $\gamma$  en la superficie del árbol es



$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$$

estando medido el ángulo  $\alpha$  en radianes. Por geometría, de la figura se deduce que

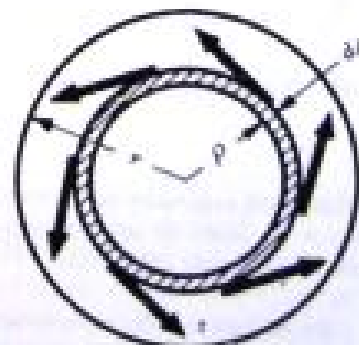
$$\alpha = \frac{AB}{L} = \frac{r\theta}{L}, \quad \text{de donde} \quad \gamma = \frac{r\theta}{L}$$

Y como se supone que un diámetro del árbol antes de aplicar la carga sigue siendo un diámetro cuando se produce la torsión, la deformación unitaria de torsión a una distancia  $\rho$  del centro del árbol será

$$\tau_{\rho} = \frac{\rho\theta}{L}$$

Por consiguiente, las deformaciones por cortante de las fibras longitudinales varían linealmente con las distancias al centro del árbol.

Si suponemos que consideramos solamente la zona de comportamiento lineal del material en que la tensión cortante es proporcional a la deformación, es evidente que las tensiones cortantes de las fibras longitudinales varían linealmente con las distancias al eje del árbol. Indudablemente, esta distribución es simétrica respecto a ese eje. El aspecto es el que aparece en la figura adjunta. Para que haya equilibrio, la suma de los momentos de esas fuerzas cortantes repartidas sobre toda la sección circular es igual al momento torsor aplicado. También, la suma de los momentos de esas fuerzas es igual al par  $T$  representado en la Figura (b).



Así, pues, tenemos

$$T = \int_0^r \tau \rho \, dA$$

(d)

donde  $dh$  representa la superficie del elemento anular rayado en la Fig. 14f), pero las tensiones cortantes varían con las distancias al eje geométrico, por lo que

$$\tau(r, \rho) = \tau(r), r = \text{constante}$$

donde los subíndices de las tensiones cortantes indican las distancias desde el eje del árbol. Por consiguiente, podemos escribir

$$T = \int_0^R \frac{\tau(r)}{\rho} (\rho^2) dh = \frac{\tau(r)}{\rho} \int_0^R \rho^2 dh$$

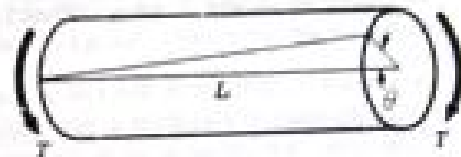
por ser constante la relación  $\frac{\tau(r)}{\rho}$ . Pero la expresión  $\int_0^R \rho^2 dh$  es, por definición (véase el Problema 1), el momento polar de inercia de la sección. En el Problema 1 se dedujeron sus valores para árboles circulares huecos y macizos, por lo que la relación buscada es

$$T = \frac{\tau(r) J_p}{\rho}, \quad \text{de donde} \quad \tau(r) = \frac{T \rho}{J_p}$$

3. Deducir una expresión para el ángulo de torsión de un árbol circular, en función del momento torsor aplicado.

Sea  $L$  la longitud del árbol,  $J_p$  el momento polar de inercia de la sección,  $T$  el momento torsor aplicado (supuesto constante en toda la longitud de la barra) y  $G$  el módulo de elasticidad en cortante. En el esquema adjunto se representa el ángulo de torsión en una longitud  $L$  por  $\theta$ .

Por el Problema 2 tenemos que en las fibras extremas en las que  $\rho = r$ :



$$\tau = \frac{r\theta}{L} \quad \text{y} \quad \tau(r) = \frac{T r}{J_p}$$

Por definición, el módulo a cortante está dado por  $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{T r / J_p}{r\theta / L} = \frac{T L}{J_p \theta}$ , de donde  $\theta = \frac{T L}{G J_p}$ .

Obsérvese que  $\theta$  está expresado en radianes, esto es, no tiene dimensión. Podríamos tomar un sistema homogéneo de unidades, expresando  $T$  en kg-cm,  $L$  en cm,  $G$  en kg/cm<sup>2</sup> e  $J_p$  en cm<sup>4</sup>.

A veces es útil considerar el ángulo de torsión por unidad de longitud. Se suele representar por  $\phi$  y está dado por

$$\phi = \frac{\theta}{L} = \frac{T}{G J_p}$$

4. Deducir una relación entre el momento torsor que actúa sobre un árbol que gira, la potencia transmitida por él y su velocidad angular, que se supone constante.

Representemos el momento torsor que actúa en el árbol por  $T$ , la velocidad angular en rpm por  $n$  y la potencia por CV, y consideremos un intervalo de tiempo de un minuto. Durante este intervalo, el momento torsor ejecuta una cantidad de trabajo, dada por el producto del momento por el desplazamiento angular en radianes, o sea,  $T \times 2\pi n$ . Si  $T$  está medido en kg-cm, el trabajo tiene esas mismas unidades. Por definición, si se realiza el trabajo a razón de 7.500 kg-cm por segundo = 60(7.500) = 450.000 kg-cm/min, es equivalente a un caballo de vapor. Por tanto, la potencia transmitida por el árbol es

$$CV = \frac{T \times 2\pi n}{450.000}, \quad \text{de donde} \quad T = \frac{71.600 \times CV}{n}$$

donde  $n$  está expresado en rpm y  $T$  en kg-cm.



5. Si se aplica un momento torsor de 10.000 kg-cm sobre un árbol de 45 mm de diámetro, ¿cuál es la tensión cortante máxima producida? ¿Cuál es el ángulo de giro en una longitud de árbol de 1,20 m? El material es acero, para el cual  $G = 8,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

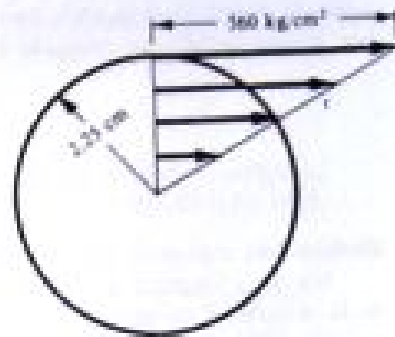
Por el Problema 1, sabemos que el momento polar de la sección es

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D_o)^4 = \frac{\pi}{32} (4,5)^4 = 40,2 \text{ cm}^4$$

En el Problema 2 se vio que la tensión cortante por torsión  $\tau$  a la distancia  $\rho$  del centro del árbol era:  $(\tau)_\rho = T\rho/I_p$ . La tensión cortante máxima se produce en las fibras exteriores, y como en ellas  $\rho = 2,25 \text{ cm}$ , tenemos

$$(\tau)_{\max} = \frac{10.000(2,25)}{40,2} = 560 \text{ kg/cm}^2$$

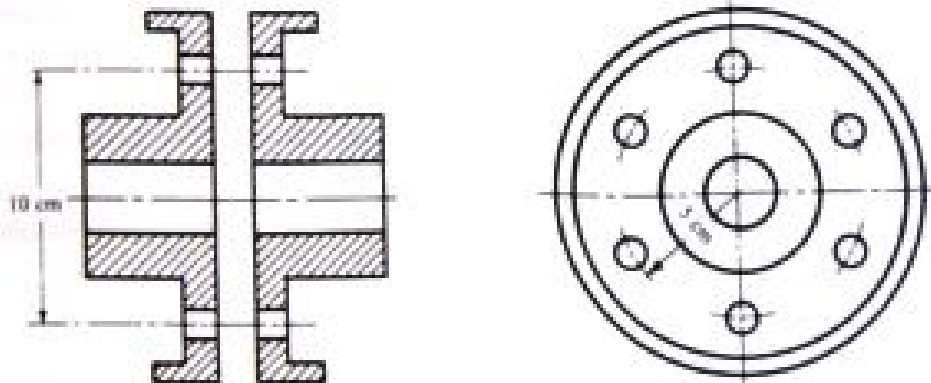
Por tanto, la tensión cortante varía linealmente desde cero en el centro del árbol a 560 kg/cm<sup>2</sup> en las fibras extremas, como se muestra en la figura.



El ángulo de giro  $\theta$  en una longitud de 1,20 m es

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{10.000(120)}{8,4 \times 10^5(40,2)} = 0,0355 \text{ radianes}$$

6. Para unir los extremos de dos ejes se usa frecuentemente un acoplamiento del tipo representado en la figura. Las dos partes están unidas entre sí por medio de seis pernos de 20 mm de diámetro. Si el eje macizo transmite 65 CV a 250 rpm, determinar el cortante medio en los pernos.



El par transmitido es  $T = \frac{71.600 \times \text{CV}}{\pi} = \frac{71.600(65)}{250} = 18.600 \text{ kg-cm}$ . La fuerza tangencial que actúa a 5 cm del centro del árbol para dar origen a este par es de  $18.600/5 = 3.720 \text{ kg}$ .

Por tanto, la tensión cortante media en cada perno es  $\tau = \frac{3.720}{6 \times \frac{\pi}{4} (2)^2} = 197 \text{ kg/cm}^2$ . Se ha supuesto que el

radio de los pernos es pequeño comparado con el del círculo en que están situados.

Obsérvese que esta tensión cortante media es la que aparecía en el Capítulo 4 y que en este problema no interviene la tensión cortante torsional.

7. Considerar un árbol circular macizo y otro hueco cuyo diámetro interior es los 3/4 del exterior. Comparar los pesos de igual longitud de estos árboles, necesarios para transmitir una carga torsional dada, si son iguales las tensiones cortantes producidas en ambos.

Para el árbol macizo, de diámetro  $d$ , la tensión cortante está dada por  $(\tau)_\rho = T\rho/J_p$ .

El valor máximo de esa tensión se produce en las fibras extremas, en las que  $\rho = d/2$ . Por tanto,

$$(\tau)_{\max} = \frac{T(d/2)}{\pi/32 d^4} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{o} \quad \frac{T}{(\tau)_{\max}} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Para el árbol hueco de diámetro  $D$  la tensión cortante máxima tiene lugar también en las fibras extremas donde  $\rho = D/2$ , por lo que

$$(\tau)_{\max} = \frac{T(D/2)}{\frac{\pi}{32} D^4 - \frac{\pi}{4} D^4} = \frac{16T}{\pi(0.684)D^3} \quad \text{o} \quad \frac{T}{(\tau)_{\max}} = \frac{\pi(0.684)D^3}{16}$$

Pero la relación  $T/(\tau)_{\max}$  es constante para los dos árboles, por lo cual  $0.684D^3 = d^3$ , de donde  $D = 1.135d$ .

$$\text{Relación de pesos} = \frac{D^2 - (3D/4)^2}{d^2} = \frac{0.4375D^2}{d^2} = \frac{0.4375(1.135d)^2}{d^2} = 0.563$$

Así, pues, el árbol hueco pesa sólo el 56.3% del peso del macizo, lo que demuestra la ventaja de un árbol hueco sobre uno macizo.

8. Un árbol hueco de acero de 3 m de longitud debe transmitir un par de 250.000 kg-cm. El ángulo de torsión en esta longitud no debe exceder de 2.5° y la tensión cortante admisible es de 850 kg/cm<sup>2</sup>. Determinar los diámetros exterior e interior del árbol si  $G = 8.5 \times 10^3$  kg/cm<sup>2</sup>.

Sean  $d_e$  y  $d_i$  los diámetros exterior e interior del árbol, respectivamente. Por el Problema 3, sabemos que el ángulo  $\theta$  está dado por  $\theta = TL/GJ_p$ , estando  $\theta$  expresado en radianes. Por consiguiente, en los 3 m de longitud tenemos

$$2.5 \text{ grados} \times \frac{1 \text{ rad}}{57.3 \text{ grad}} = \frac{250.000(300)}{8.5 \times 10^3 \times \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad \text{de donde} \quad d_e^4 - d_i^4 = 20.600$$

La tensión cortante máxima tiene lugar en las fibras exteriores para las cuales  $\rho = d_e/2$ . Por tanto,

$$(\tau)_{\max} = \frac{T(d_e/2)}{\frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad 850 = \frac{250.000(d_e/2)}{\frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad \text{y} \quad d_e^4 - d_i^4 = 1.498d_e$$

Así, pues,  $1.498d_e = 20.600$  y  $d_e = 13.75$  cm. Sustituyendo,  $d_i = 11.1$  cm.

9. Considerar un tubo de pared delgada sometido a torsión. Deducir una expresión aproximada del momento torsor admisible si el esfuerzo de trabajo en cortante es una constante dada  $\tau_w$ . Deducir también una expresión aproximada para la relación resistencia-peso de ese tubo. Se supone que el tubo no pande.

El momento polar de inercia de un árbol circular hueco de diámetro exterior  $D_e$  e interior  $D_i$  es  $J_p = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4)$ . Si  $R$  representa el radio exterior del tubo,  $D_e = 2R$ , y si  $t$  es el espesor,  $D_i = 2R - 2t$ .

El momento polar de inercia  $J_p$  puede escribirse también en la forma

$$\begin{aligned} J_p &= \frac{\pi}{32} [(2R)^4 - (2R - 2t)^4] = \frac{\pi}{32} [R^4 - (R - t)^4] = \frac{\pi}{32} [4R^3t - 6R^2t^2 + 4Rt^3 - t^4] \\ &= \frac{\pi}{2} R^2 [4t/R - 6t/R^2 + 4t/R^3 - t/R^4] \end{aligned}$$

Despreciando los cuadrados y las potencias superiores de la relación  $t/R$ , pues estamos considerando un tubo de pared delgada, esta expresión se convierte en el valor aproximado

$$I_p = 2\pi R^3 t$$

La fórmula ordinaria de la torsión es  $T = \tau_s J_p / R$ . Para un tubo de pared delgada, esta expresión nos lleva para el momento torsor admisible a

$$T = 2\pi R^2 t \tau_s$$

El peso  $W$  del tubo es  $W = \gamma LA$ , siendo  $\gamma$  el peso específico del material,  $L$  la longitud del tubo y  $A$  la sección del mismo. La sección está dada por

$$A = \pi[R^2 - (R - t)^2] = \pi[2Rt - t^2] = \pi R^2[2t/R - (t/R)^2]$$

Despreciando nuevamente el cuadrado de la relación  $t/R$  por tratarse de un tubo delgado, esta expresión se transforma en

$$A = 2\pi Rt$$

La relación resistencia-peso está definida por  $T/W$ , que viene dada por

$$\frac{T}{W} = \frac{2\pi R^2 t \tau_s}{2\pi R t L \gamma} = \frac{R \tau_s}{L \gamma}$$

Esta relación es de importancia considerable para el diseño de aeronaves.

10. Un árbol circular macizo tiene una ligera variación de grueso, uniforme desde un extremo al otro. Llamando  $a$  al radio del extremo pequeño, y  $b$  al del grande, determinar el error cometido si se calcula el ángulo de torsión para una longitud dada tomando el radio medio del árbol. El radio en el extremo más ancho es 1,2 veces el del más estrecho.

Tomemos un sistema de ejes coordenados tal que la variable  $x$  represente la distancia al extremo menor; el radio de una sección a la distancia  $x$  de dicho extremo es

$$r = a + \frac{(b-a)x}{L}$$

siendo  $L$  la longitud de la barra.

Como el ángulo de variación de sección es pequeño, es suficiente considerar el ángulo  $d\theta$  que gira el elemento sombreado de longitud  $dx$ , que se obtiene aplicando la expresión  $\theta = TL/GI_p$  al elemento de longitud  $dx$  y radio  $r = a + \frac{(b-a)x}{L}$ . Para ese elemento, el momento polar de inercia es  $I_p = \frac{\pi}{32} D^4 = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} \left[ a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^4$ .

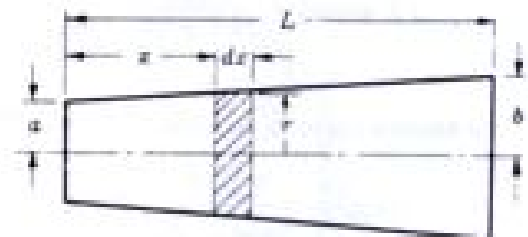
Así, pues,

$$d\theta = \frac{T dx}{G \frac{\pi}{2} \left[ a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^4}$$

El ángulo de torsión en la longitud  $L$  se halla integrando esta ecuación, por lo que

$$\theta = \frac{2T}{G\pi} \int_0^L \frac{dx}{\left[ a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^4} = \frac{2T}{G\pi} \left( -\frac{1}{3} \frac{L}{b-a} \right) \left[ \frac{1}{\left[ a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^3} \right]_0^L = \frac{2TL}{3G\pi(b-a)} \left( \frac{1}{b^3} + \frac{1}{a^3} \right)$$

Si  $b = 1.2a$ , esta expresión es  $\theta = \frac{1.404337L}{G\pi a^3}$



Para un árbol macizo de radio uniforme 1.1a,  $\theta_1 = \frac{TL}{G \frac{\pi}{2} (1.1a)^4} = \frac{1,366027L}{G \pi a^4}$

Tanto por ciento de error =  $\frac{0,03831}{1,40433} \times 100 = 2,73 \%$

11. Un árbol circular macizo tiene un diámetro uniforme de 5 cm y una longitud de 3 m. En su punto medio se le transmiten 65 CV por medio de una correa que pasa por una polea. Esta potencia se usa para mover dos máquinas, una en el extremo izquierdo del árbol que consume 25 CV y otra en el derecho, que consume los 40 CV restantes. Determinar la tensión cortante máxima en el árbol y el ángulo de torsión relativo entre sus dos extremos. La velocidad de giro es de 200 rpm y el material es acero para el cual  $G = 8,4 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$ .

En la mitad izquierda del árbol tenemos 25 CV, que corresponden a un par  $T_1$  dado por

$$T_1 = \frac{71.600 \times CV}{\pi} = \frac{71.600(600)(25)}{200} = 8.950 \text{ kg-cm}$$

Del mismo modo, en el lado derecho tenemos 40 CV, correspondientes a un par  $T_2$  dado por

$$T_2 = \frac{71.600(40)}{200} = 14.320 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, la tensión cortante máxima tiene lugar en las fibras exteriores de la mitad derecha y viene dada por la fórmula ordinaria de la torsión

$$(\tau)_p = \frac{T\rho}{J_p} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{14.320(2,5)}{\frac{\pi}{32} (5)^4} = 583 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo de torsión del extremo izquierdo con relación al centro es  $\theta_1 = \frac{8.950(150)}{8,4 \times 10^9 \frac{\pi}{32} (5)^4} = 0,0260 \text{ rad.}$

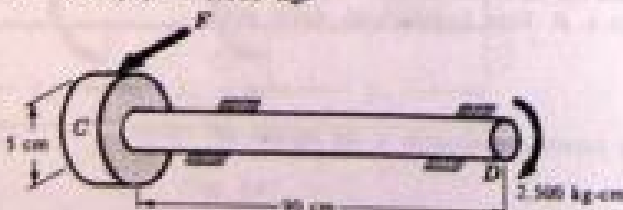
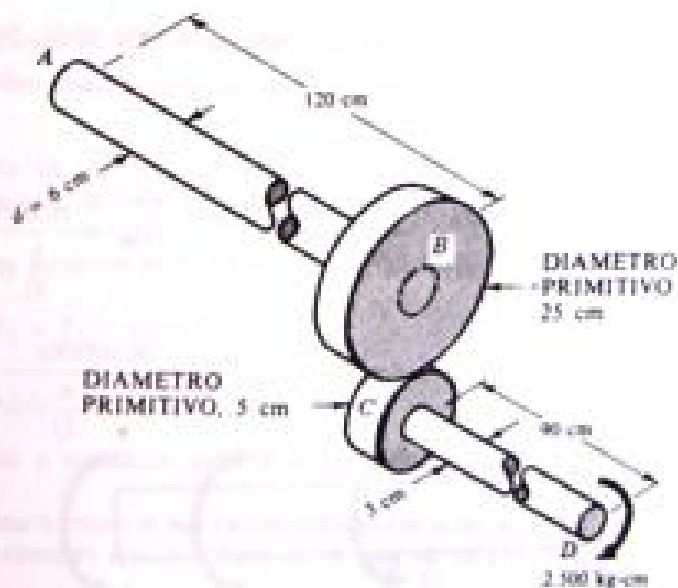
El ángulo de torsión del extremo derecho con relación al centro es  $\theta_2 = \frac{14.320(150)}{8,4 \times 10^9 \frac{\pi}{32} (5)^4} = 0,0417 \text{ rad.}$

en la misma dirección que  $\theta_1$ .

El ángulo de torsión relativo entre los dos extremos del árbol es  $\theta = \theta_2 - \theta_1 = 0,0417 - 0,0260 = 0,0157$  radianes.

12. Considerar los dos árboles macizos circulares conectados por las ruedas dentadas de diámetros 5 cm y 25 cm. Se supone que los árboles están soportados en sus apoyos de modo que no sufren flexión. Hallar el giro del extremo derecho D de uno de los árboles, con respecto al extremo izquierdo A del otro, producido por el par de 2.500 kg-cm aplicado en D. El árbol de la izquierda es de acero, para el cual  $G = 8,4 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$  y el de la derecha bronce con  $G = 3,5 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$ .

Un esquema de cuerpo en libertad del árbol derecho revela que debe actuar sobre la rueda dentada pequeña una fuerza tangencial  $F$ , como se indica en la figura. Para que haya equilibrio  $F = 2.500/2,5 = 1.000 \text{ kg.}$



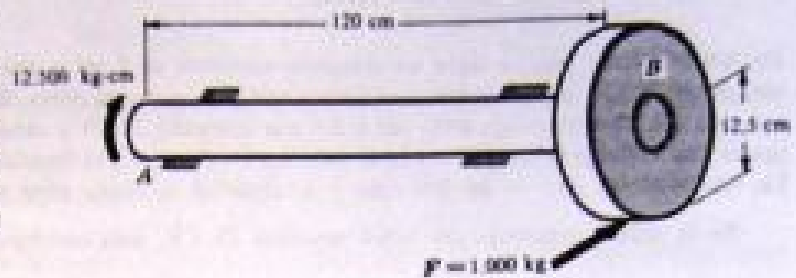
El ángulo de torsión del árbol derecho está dado por  $\theta_1 = \frac{TL}{GI_p} = \frac{2.500(90)}{3,5 \times 10^5 \frac{\pi}{32} (3)^4} = 0,0808 \text{ rad.}$

En la figura adjunta se muestra un esquema de cuerpo en libertad del árbol izquierdo. La fuerza  $F$  es igual y opuesta a la que actúa en la rueda dentada pequeña  $C$ . Está aplicada a 12,5 cm del eje del árbol  $AB$ , por lo que le transmite un par de  $12,5(1.000) = 12.500 \text{ kg-cm}$ . A causa de este par hay un giro del extremo  $B$  con respecto al  $A$  dado por el ángulo  $\theta_2$ , donde

$$\theta_2 = \frac{12.500(120)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32} (6)^4} = 0,0140 \text{ rad.}$$

Es importante observar que este ángulo de giro  $\theta_2$  induce un giro de *cuerpo rígido* de todo el árbol  $CD$  por causa de las ruedas dentadas. El giro de  $CD$  estará en la misma relación respecto al de  $AB$  que los diámetros, o sea, 25 : 5 o 5 : 1. Por tanto, en el árbol  $CD$  se produce un giro de  $5(0,0140) \text{ rad.}$  Sobre este giro como cuerpo rígido de  $CD$  se superpone el desplazamiento angular de  $D$  respecto a  $C$  representado antes por  $\theta_1$ .

Por tanto, el ángulo de torsión resultante de  $D$  respecto a  $A$  es  $\theta = 5(0,0140) + 0,0808 = 0,151 \text{ rad.}$



13. El árbol compuesto representado es de acero para el cual  $G = 8,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Se despreciará la concentración de tensiones producida por el cambio brusco de sección.

En el extremo inferior, el árbol está sometido a un par de 50.000 kg-cm en el sentido indicado, y en la unión a otro par de 80.000 kg-cm en sentido opuesto al primero. Determinar la tensión cortante máxima en cada parte del árbol y los ángulos de torsión en  $B$  y en  $C$ .

El par que actúa en la zona  $BC$  es, indudablemente, de 50.000 kg-cm. En la parte  $AB$  es de  $50.000 - 80.000 = -30.000 \text{ kg-cm}$ , esto es, de dirección opuesta al de  $BC$ .

La tensión cortante en cada zona está dada por la fórmula  $(\tau)_r = \frac{T\rho}{J_p}$ , por lo que en las fibras extremas de cada uno de esos árboles tenemos

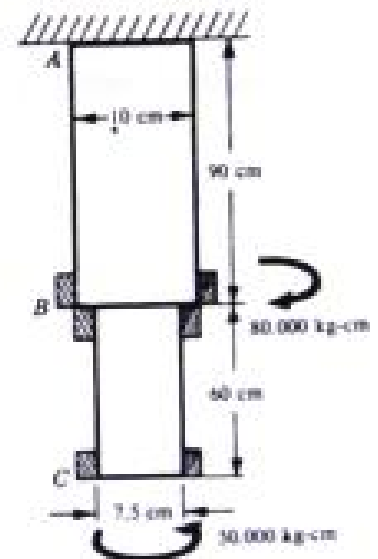
$$(\tau)_{AB} = \frac{30.000(5)}{\frac{\pi}{32} (10)^4} = 155 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad (\tau)_{BC} = \frac{50.000(3,75)}{\frac{\pi}{32} (7,5)^4} = 600 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo de torsión en  $B$  es  $\theta_1 = \frac{30.000(90)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32} (10)^4} = 0,00327 \text{ radianes}$  (en sentido de las agujas del reloj

mirando hacia abajo). Este es el valor verdadero o absoluto del ángulo de torsión en  $B$ .

Consideremos momentáneamente que la unión  $B$  está fija en el espacio en su posición no deformada y calculemos el ángulo de giro de la sección  $C$  con respecto a  $B$ . Este ángulo está dado por

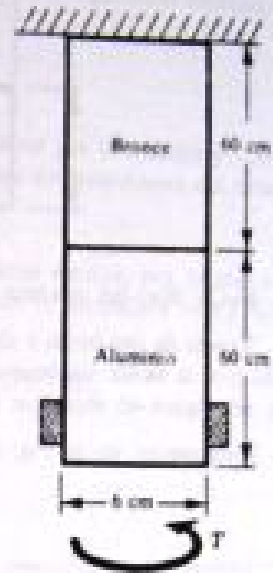
$$\theta_2 = \frac{50.000(60)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32} (7,5)^4} = 0,01150 \text{ radianes (sentido contrario a las agujas del reloj)}$$



Sin embargo, este no es el verdadero ángulo de giro en C, porque la sección B no está fija en el espacio, sino que gira 0,00327 radianes en sentido opuesto, por lo que el verdadero ángulo de giro de C con respecto a su posición original no deformada es de

$$\theta_1 = 0,01150 - 0,00327 = 0,00823 \text{ radianes (sentido de las agujas del reloj)}$$

14. Un árbol compuesto consta de una varilla de bronce de 60 cm de longitud unida fuertemente a una barra de aluminio de 60 cm. Cada una de ellas tiene 6 cm de diámetro. El límite de proporcionalidad del bronce en cortante es 1.050 kg/cm<sup>2</sup> y el de la aleación de aluminio 1.550 kg/cm<sup>2</sup>, debiéndose aplicar un coeficiente de seguridad 2 en cada caso. Si el ángulo de torsión en el extremo derecho no debe exceder de 1°, ¿cuál es el máximo momento torsor que puede soportar el árbol? Se supone que está sujeto rigidamente en su extremo superior. Para el bronce,  $G = 3,5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y para el aluminio  $G = 2,8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .



Quizá el método más sencillo para resolver el problema es determinar tres valores del momento torsor. El primero es el par suficiente para producir la tensión de trabajo a cortante en el bronce; el segundo par produce la tensión de trabajo a cortante en el aluminio, y el tercero crea una torsión de 1° en todo el árbol. El par admisible es el mínimo de estos tres valores.

Los pares primero y segundo,  $T_1$  y  $T_2$ , se hallan por la fórmula de la torsión:

$$\frac{1.050}{2} = \frac{T_1(3)}{\frac{\pi}{32}(6)^4} \quad \text{y} \quad \frac{1.550}{2} = \frac{T_2(3)}{\frac{\pi}{32}(6)^4}$$

de donde  $T_1 = 22.300 \text{ kg-cm}$     y     $T_2 = 32.900 \text{ kg-cm}$

El tercer par,  $T_3$ , da origen a un ángulo de torsión de 1° de todo el árbol. Puede hallarse por la fórmula ordinaria de la deformación torsional:

$$1^\circ \times \frac{1 \text{ rad}}{57,3^\circ} = \frac{T(60)}{3,5 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(6)^4} + \frac{T_3(60)}{2,8 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(6)^4} \quad \text{de donde} \quad T_3 = 5.760 \text{ kg-cm}$$

Como  $T_3$  es el mínimo de estos tres valores, el ángulo de torsión es el factor determinante en el diseño, y el par máximo que puede aplicarse es de 5.760 kg-cm.

15. Determinar los pares reactivos en los extremos fijos de un árbol circular cargado por los pares representados en la Fig. (a). La sección de la barra es constante en toda la longitud.

Supongamos que los pares reactivos  $T_A$  y  $T_D$  son positivos en el sentido en la Fig. (b). Por la estática, tenemos

$$(1) \quad T_A - T_1 + T_2 - T_D = 0$$



Fig. (a)

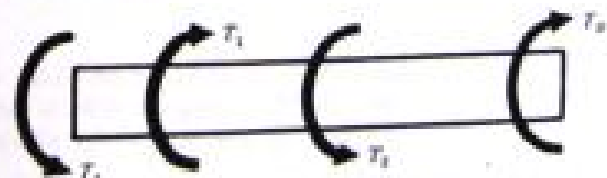
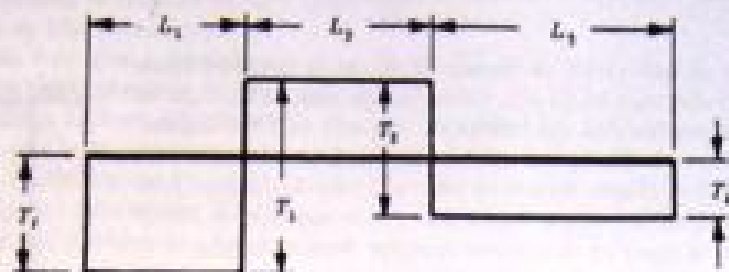


Fig. (b)

Es la única ecuación del equilibrio estático, y contiene dos incógnitas, por lo que el problema es estáticamente indeterminado y es necesario suplementarla con otra basada en la deformación del sistema.

La variación del par con la longitud a lo largo de la barra puede representarse como el gráfico siguiente:



En la Fig. (a) aparece el esquema de cuerpo en libertad de la parte izquierda, de longitud  $L_1$ .

Yendo de izquierda a derecha a lo largo del árbol, el momento torsor en la zona central de longitud  $L_2$  está dado por la suma algebraica de los pares que existen a la izquierda de esa sección, es decir,  $(T_1 - T_1)$ . En la Fig. (b) figura el esquema de cuerpo en libertad de esta zona.

Finalmente, en la Fig. (c) aparece el diagrama de cuerpo en libertad de la parte derecha, de longitud  $L_3$ .

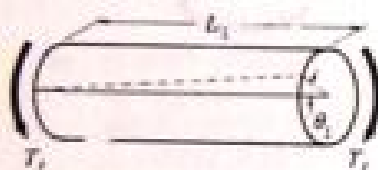


Fig. (a)

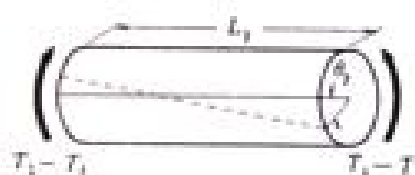


Fig. (b)

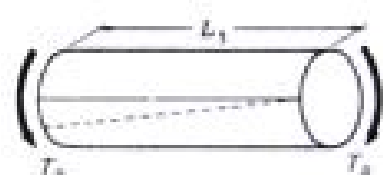


Fig. (c)

Sea  $\theta_1$  el ángulo de torsión del punto de aplicación en  $T_1$  y  $\theta_2$  el ángulo en  $T_2$ . Considerando las zonas de longitudes  $L_1$  y  $L_2$ , tenemos inmediatamente

$$(2) \quad \theta_1 = \frac{T_1 L_1}{GJ_p} \quad \text{y} \quad (3) \quad \theta_2 = \frac{T_2 L_2}{GJ_p}$$

En cada uno de los esquemas anteriores se representa la situación original de una generatriz de la superficie del árbol por una línea llena y la posición deformada por líneas de trazos. La observación de la zona central de longitud  $L_2$  revela que el ángulo de torsión de su extremo derecho respecto al izquierdo es  $(\theta_1 + \theta_2)$ , por lo que como el par que origina esta deformación es  $(T_1 - T_2)$ , tenemos

$$(4) \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{(T_1 - T_2)L_2}{GJ_p}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) a (4), hallamos

$$T_1 = T_2 \left( \frac{L_2 + L_3}{L} \right) - T_0 \left( \frac{L_3}{L} \right) \quad \text{y} \quad T_2 = -T_1 \left( \frac{L_1}{L} \right) + T_0 \left( \frac{L_1 + L_2}{L} \right)$$

Es interesante observar el comportamiento de una generatriz de la superficie del árbol. Al principio era, naturalmente, recta en toda su longitud  $L$ , pero después de la aplicación de  $T_1$  y  $T_2$  tiene el aspecto de la línea quebrada de la figura adjunta.





16. Considerar un árbol compuesto fabricado con uno macizo de 5 cm de diámetro de aleación de aluminio con  $G = 2,8 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ , rodeado de otro de acero, circular, hueco, de diámetro exterior 6,5 cm e interior 5 cm, con  $G = 8,4 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ . Los dos metales están rigidamente unidos entre sí. Si el árbol compuesto está cargado con un momento torsor de 14.000 kg-cm, calcular la tensión cortante en las fibras extremas del acero y en las del aluminio.

Sean  $T_1 =$  par soportado por el aluminio, y  $T_2 =$  par soportado por el acero. Por el equilibrio estático de los momentos respecto al eje geométrico, tenemos

$$T_1 + T_2 = T = 14.000$$

donde  $T =$  momento torsor exterior aplicado. Es la única ecuación que podemos obtener por la estática y, como contiene dos incógnitas,  $T_1$  y  $T_2$ , debemos suplementarla con otra que provenga de las deformaciones del árbol. La estructura es, pues, estáticamente indeterminada.

La ecuación necesaria se halla fácilmente, pues los dos materiales están rigidamente unidos, por lo que sus ángulos de torsión han de ser iguales. En una longitud  $L$  de árbol tenemos, utilizando la fórmula  $\theta = TL/GI_p$

$$\frac{T_1 L}{2,8 \times 10^3 \frac{\pi}{32} (5)^4} = \frac{T_2 L}{8,4 \times 10^3 \frac{\pi}{32} [(6,5)^4 - (5)^4]} \quad \text{o} \quad T_1 = 0,18 T_2$$

Esta ecuación, junto con la de la estática, forma un sistema que resuelto da:

$$T_1 = 2.140 \text{ kg-cm (soportado por el aluminio)} \quad \text{y} \quad T_2 = 11.860 \text{ kg-cm (soportado por el acero)}$$

$$\text{La tensión cortante en las fibras extremas del tubo de acero es } (\tau)_2 = \frac{11.860(3,25)}{\frac{\pi}{32} [(6,5)^4 - (5)^4]} = 340 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{La tensión cortante en las fibras extremas del aluminio es } (\tau)_1 = \frac{2.140(2,5)}{\frac{\pi}{32} (5)^4} = 90 \text{ kg/cm}^2.$$

17. Un árbol circular macizo de acero está rodeado por una envuelta delgada de cobre unida rigidamente a él. El conjunto está sometido a un momento torsor. Si el cobre soporta 1,5 veces el par que soporta el acero, hallar la relación entre los diámetros exterior e interior del tubo de cobre. Para el cobre,  $G = 4,2 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ , y para el acero,  $G = 8,4 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ .

Como los dos metales están rigidamente unidos, los ángulos de torsión de ambos son iguales. Dichos ángulos están dados por  $\theta = TL/GI_p$ , por lo que si  $T$  es el par soportado por el acero, tenemos

$$\frac{TL}{8,4 \times 10^3 \frac{\pi}{32} d_i^4} = \frac{(1,5T)L}{4,2 \times 10^3 \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad \text{de donde} \quad \frac{d_e}{d_i} = \sqrt[4]{2} = 1,414$$

donde  $d_e$  y  $d_i$  son los diámetros exterior e interior del tubo de cobre.

18. Si la tensión cortante máxima admisible en el tubo de cobre del Problema 17 es 360 kg/cm<sup>2</sup> y en el acero 840 kg/cm<sup>2</sup>, determinar el par máximo que puede soportar el árbol compuesto. El diámetro del árbol de acero es de 60 mm y, como en el Problema 17, el cobre soporta 1,5 veces el par del acero.

Probablemente el procedimiento más sencillo es determinar dos valores del par, uno basado en la hipótesis de que el cobre está sometido a su tensión máxima admisible y el otro suponiendo que en el acero hay un constante de 840 kg/cm<sup>2</sup>. No es de esperar que el mismo par produzca las tensiones críticas en cada uno de los materiales simultáneamente. El menor de estos dos pares es el valor límite que puede soportar el árbol compuesto.

Supongamos que se produce una tensión cortante de  $560 \text{ kg/cm}^2$  en las fibras extremas del tubo de cobre. Este tubo tiene un diámetro exterior de  $6\sqrt{2} = 8,48 \text{ cm}$  y un diámetro interior de  $6 \text{ cm}$ . Para hallar el par  $T_c$  que soporta, tenemos:

$$560 = \frac{T_c(8,48/2)}{\frac{\pi}{32} [(8,48)^4 - (6)^4]} \quad \text{y} \quad T_c = 50.250 \text{ kg-cm}$$

El par soportado por el acero es, en este caso,  $T_a = \frac{50.250}{1,5} = 33.500 \text{ kg-cm}$ .

El par soportado por el árbol compuesto es la suma de estos pares, o sea,  $83.750 \text{ kg-cm}$ .

Supongamos, ahora, que en las fibras exteriores del acero se produce una tensión cortante de  $840 \text{ kg/cm}^2$ . El par que soporta en este caso es:

$$840 = \frac{T_a(6/2)}{\frac{\pi}{32} (6)^4} \quad \text{y} \quad T_a = 35.600 \text{ kg-cm}$$

y el que soporta el cobre es  $T_c = 1,5(35.600) = 53.400 \text{ kg-cm}$ . El par total que soporta el árbol compuesto de acuerdo con esta hipótesis es, por consiguiente,  $89.000 \text{ kg-cm}$ .

Así, pues, el que determina el par límite que puede soportar el conjunto es el primero de los valores, esto es,  $83.750 \text{ kg-cm}$  para el cual no se excede de ninguna de las tensiones de trabajo.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

19. Si un árbol circular macizo de  $30 \text{ mm}$  de diámetro está sometido a un par  $T$  de  $2.500 \text{ kg-cm}$  que produce un ángulo de torsión de  $3,38$  grados en una longitud de  $1,5 \text{ m}$ , determinar el módulo cortante del material.  
Sol.  $G = 8 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$
20. Considerar un árbol circular hueco de diámetro exterior  $12,5 \text{ cm}$  e interior  $7,5 \text{ cm}$ . Por la experiencia se ha determinado que la tensión cortante en las fibras interiores es de  $600 \text{ kg/cm}^2$ . ¿Cuál es la tensión cortante en las exteriores?  
Sol.  $1.000 \text{ kg/cm}^2$
21. Determinar la tensión cortante máxima en un árbol macizo de  $10 \text{ cm}$  de diámetro que soporta un par de  $228.000 \text{ kg-cm}$ . ¿Cuál es el ángulo de torsión por unidad de longitud si el material es acero para el cual  $G = 8,4 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ ?  
Sol.  $1.160 \text{ kg/cm}^2$ ,  $0,000276 \text{ rad/cm}$
22. Determinar la potencia máxima que puede transmitir un árbol macizo de acero de  $55 \text{ mm}$  de diámetro a  $250 \text{ rpm}$  si la tensión de trabajo del acero es  $750 \text{ kg/cm}^2$ .  
Sol.  $86 \text{ CV}$
23. Un árbol hueco de acero de  $5,50 \text{ m}$  de longitud tiene un diámetro exterior de  $125 \text{ mm}$  y uno interior de  $6,25 \text{ mm}$  y está conectado a una máquina que produce  $250 \text{ CV}$  a una velocidad de  $150 \text{ rpm}$ . Calcular la tensión cortante máxima en el árbol y la torsión en los  $5,50 \text{ m}$  de longitud. Tomar  $G = 8,4 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ .  
Sol.  $330 \text{ kg/cm}^2$ ,  $0,0348 \text{ rad}$
24. Un eje de hélice de barco tiene  $35 \text{ cm}$  de diámetro. La tensión de trabajo en cortante admisible es de  $500 \text{ kg/cm}^2$  y el ángulo de torsión admisible de  $1^\circ$  en  $15$  diámetros de longitud. Si  $G = 8,4 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$ , determinar el par máximo que puede transmitir el árbol.  
Sol.  $4.114.000 \text{ kg-cm}$
25. Considerar el mismo árbol del Problema 24, pero con un agujero axial de  $17,5 \text{ cm}$  en toda su longitud. Las condiciones de tensión de trabajo y de ángulo de torsión siguen siendo las mismas. ¿En qué porcentaje se reduce la capacidad de soportar carga torsional? ¿En qué proporción se reduce el peso del árbol?  
Sol.  $6,25\%$ ,  $25\%$

26. Comparar el par que pueden soportar dos árboles de la misma área de la sección, uno circular hueco cuyo espesor radial es de 30 mm y el otro circular macizo de 120 mm de diámetro. La tensión cortante máxima es igual para ambos. Sol. Relación de pares = 1,70
27. Un árbol hueco de acero debe transmitir 7.500 CV a 120 rpm. Si la tensión cortante admisible es de 850 kg/cm<sup>2</sup> y la relación del diámetro exterior al interior es 2, determinar el diámetro exterior. Hallar, además, el ángulo de torsión en una longitud de 12 m.  $G = 8,4 \times 10^9$  kg/cm<sup>2</sup>. Sol. 30,6 cm, 4,55°
28. Determinar el diámetro de un árbol macizo de acero que ha de transmitir 200 CV a una velocidad de 250 rpm si la tensión cortante admisible es de 850 kg/cm<sup>2</sup>. Determinar, asimismo, las dimensiones de un árbol hueco de acero cuyo diámetro interior es tres cuartos del exterior para las mismas condiciones. ¿Cuál es la relación entre los ángulos de torsión por unidad de longitud de esos dos árboles? Sol. Diámetro = 7,00 cm, diámetro exterior = 7,95 cm, relación = 0,88
29. Considerar un árbol circular macizo que transmite 1.800 CV a 350 rpm. Determinar el diámetro necesario para que (a) no se torsione un ángulo superior a 1 grado en una longitud de 20 diámetros y (b) la tensión cortante no exceda de 650 kg/cm<sup>2</sup>. El árbol es de acero para el cual  $G = 8,4 \times 10^9$  kg/cm<sup>2</sup>. Sol. 17,2 cm
30. Un árbol compuesto está constituido por uno macizo de cobre de 65 cm de longitud y 10 cm de diámetro, unido a otro de 80 cm de longitud de acero macizo con 11,5 cm de diámetro. A cada extremo del árbol se aplica un par de 120.000 kg-cm. Hallar la tensión cortante máxima en cada material y el ángulo de torsión de todo el árbol. Para el cobre,  $G = 4,2 \times 10^9$  kg/cm<sup>2</sup>, y para el acero,  $G = 8,4 \times 10^9$  kg/cm<sup>2</sup>. Sol. En el cobre, 610 kg/cm<sup>2</sup>; en el acero, 400 kg/cm<sup>2</sup>;  $\theta = 0,0256$  rad
31. El árbol vertical y las poleas enclavadas a él pueden considerarse sin peso. El árbol gira con velocidad angular uniforme. Los esfuerzos conocidos en las poleas son los indicados y las tres poleas están sujetas rigidamente al árbol, como se puede ver en la Fig. (a). Si la tensión de trabajo a cortante es de 530 kg/cm<sup>2</sup>, determinar el diámetro necesario para un árbol circular macizo. Despreciar la flexión del árbol producida por la proximidad de los apoyos de las poleas. Sol. 3,15 cm
32. Determinar el número de pernos necesarios para unir dos árboles de 60 mm de diámetro cada uno que soportan un par de 110.000 kg-cm. La tensión cortante admisible en los pernos es de 850 kg/cm<sup>2</sup>, el diámetro del círculo de pernos de 180 mm y el diámetro de los mismos de 20 mm. Sol. 5 pernos
33. Considerar el árbol compuesto de acero representado en la Fig. (b) formado por dos barras macizas circulares. Se desprecia la concentración de tensiones en la unión de las dos. La tensión cortante máxima admisible es de 750 kg/cm<sup>2</sup> y el máximo ángulo de torsión admisible en los 150 cm de longitud, de 1 grado. ¿Cuál es la capacidad de resistencia a un par de este árbol? Para este material,  $G = 8,4 \times 10^9$  kg/cm<sup>2</sup>. Sol. 51.500 kg-cm
34. Determinar los pares reactivos en los extremos empotrados del árbol circular cargado con tres pares, representado en la Fig. (c). La sección de la barra es constante en toda su longitud. Sol.  $T_A = 3.636$  kg-cm,  $T_D = 13.636$  kg-cm

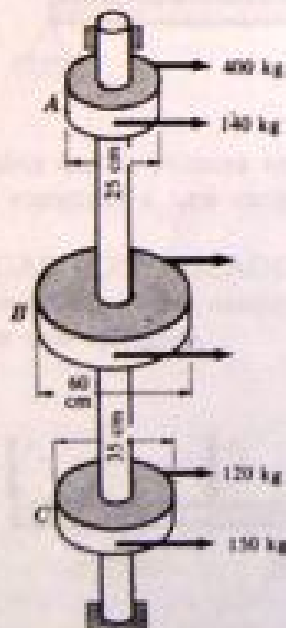


Fig. (a)  
Prob. 31

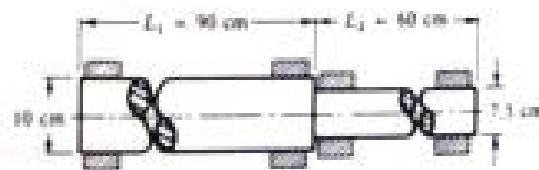


Fig. (b) Prob. 33

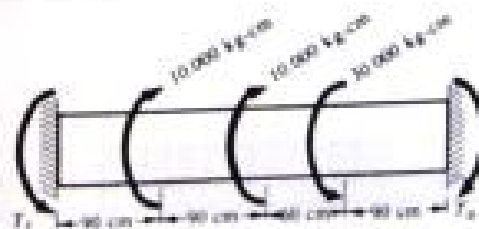


Fig. (c) Prob. 34

35. Se ha formado un árbol compuesto rodando uno macizo de bronce de 60 mm de diámetro por un tubo de acero con espesor de pared 6 mm. Los metales están íntimamente unidos entre ellos. Determinar el aumento de capacidad para soportar pares del árbol compuesto sobre el de bronce solo. Para el bronce,  $G = 3,5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , y para el acero,  $G = 8,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . La tensión de trabajo en cortante es de 500  $\text{kg/cm}^2$  para el bronce y 850  $\text{kg/cm}^2$  para el acero. Sol. 111 %

36. Considerar un árbol hueco de acero de diámetro interior 50 mm y exterior 75 mm rodeado por un tubo de aluminio de 6 mm de espesor de pared. Estos árboles compuestos se usan a veces en presencia de elementos corrosivos. Los dos metales están unidos entre sí rigidamente. Si se aplica al conjunto un momento torsor de 65.000  $\text{kg-cm}$ , hallar la tensión cortante máxima en el acero y en el aluminio. Para el acero,  $G = 8,4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , y para el aluminio,  $G = 2,8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

Sol. En el acero  $\tau = 730 \text{ kg/cm}^2$ , en el aluminio  $\tau = 280 \text{ kg/cm}^2$

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]*

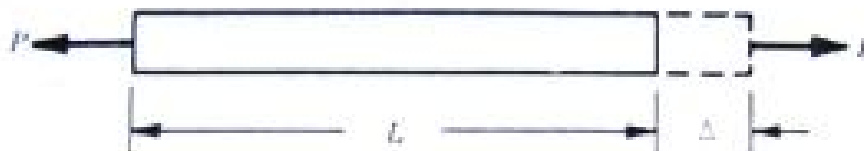


*[Faint, illegible text at the bottom of the page.]*

el material tiene tres planos de simetría elástica perpendiculares entre sí dos a dos se dice que es *ortotrópico*, en cuyo caso el número de constantes independientes es 9. En este libro se estudian solamente los materiales *isótropos*.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el alargamiento total de una barra recta inicialmente de longitud  $L$ , área de la sección transversal  $A$  y módulo de elasticidad  $E$ , si actúa en sus extremos una carga de tracción  $P$ .



La tensión unitaria en la dirección de la fuerza  $P$  no es más que la carga dividida por la sección, esto es,  $\sigma = P/A$ . De igual modo, la deformación unitaria  $\epsilon$  viene dada por el cociente del alargamiento total  $\Delta$  dividido por la longitud inicial, esto es,  $\epsilon = \Delta/L$ . Por definición, el módulo de elasticidad es la relación entre  $\sigma$  y  $\epsilon$ , es decir,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{P/A}{\Delta/L} = \frac{PL}{A\Delta} \quad \text{o} \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

Obsérvese que  $\Delta$  tiene unidades de longitud, seguramente centímetros o metros.

2. Una cinta de agrimensor, de acero, de 25 m de longitud tiene una sección de 6 mm por 0,8 mm. Determinar el alargamiento cuando se estira toda la cinta y se mantiene tirante bajo una fuerza de 6 kg. El módulo de elasticidad es  $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

$$\text{Alargamiento } \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(6)(2.500)}{(0,6)(0,08)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,15 \text{ cm}$$

3. Una barra de acero de  $5 \text{ cm}^2$  de sección está sometida a las fuerzas representadas en la Fig. (a). Determinar el alargamiento total de la barra. Para el acero  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

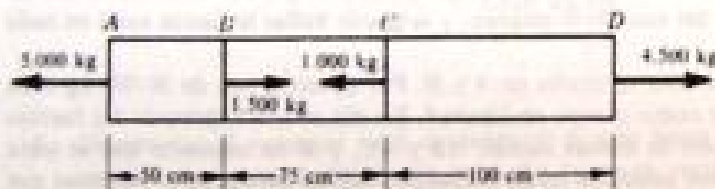


Fig. (a)

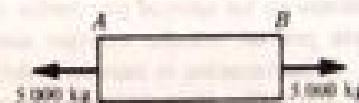


Fig. (b)

Toda la barra está en equilibrio, por lo que cada una de sus partes lo está también. El trozo de barra entre  $A$  y  $B$  tiene una fuerza resultante de 5.000 kg que actúa sobre cada sección transversal, por lo que un diagrama de cuerpo en libertad de esos 50 cm es como aparece en la Fig. (b). Para conservar el equilibrio con la fuerza aplicada al extremo izquierdo, la del extremo derecho ha de ser de 5.000 kg. El alargamiento de este trozo viene dado por

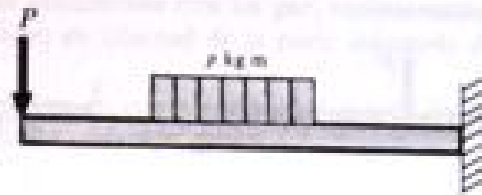
$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{5.000(50)}{(5)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,024 \text{ cm}$$

La fuerza que actúa en el trozo entre  $B$  y  $C$  se halla considerando la suma algebraica de las fuerzas situadas a la izquierda de una sección situada entre esos puntos, lo que indica que actúa una fuerza resultante de 3.500 kg hacia la izquierda, por lo que la sección está sometida a tracción. Indudablemente, podríamos haber llegado al mismo resultado considerando las fuerzas situadas a la derecha de esa sección. Como consecuencia, se obtiene el diagrama de cuerpo en libertad dado en la Figura (c).

## Esfuerzo cortante y momento flector

**DEFINICION DE VIGA.** Una barra sometida a fuerzas o pares situados en un plano que contiene a su eje longitudinal se llama viga. Se supone que las fuerzas actúan perpendicularmente a dicho eje longitudinal.

**VIGAS EN VOLADIZO.** Si la viga está sujeta solamente en un extremo, de tal manera que su eje no pueda girar en ese punto, se llama viga en voladizo. En la figura adjunta se representa este tipo de viga. El extremo izquierdo puede flectar libremente, mientras que el derecho está sujeto rigidamente. Generalmente, se dice que el extremo derecho está «empotrado». La reacción del muro de la derecha que soporta a la viga sobre ésta, consiste en una fuerza vertical junto con un par, que actúan en el plano de las cargas aplicadas.



**VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS.** Una viga que está apoyada libremente en los dos extremos se llama viga simplemente apoyada. Este término implica que los apoyos extremos son capaces de ejercer sobre la barra solamente fuerzas y no momentos. Por tanto, no existe impedimento al giro de los extremos de la barra en los apoyos cuando flexa bajo las cargas. Más abajo se representan dos vigas simplemente apoyadas.

Debe observarse que al menos uno de los apoyos ha de ser capaz de sufrir un movimiento horizontal, de modo que no exista ninguna fuerza en la dirección del eje de la viga. Si ninguno de los dos extremos fuera capaz de moverse horizontalmente se produciría alguna fuerza axial en la viga cuando se deformara bajo la carga. En este libro no se considerarán problemas de esta naturaleza.



Se dice que la primera viga de la figura de encima está cargada con una fuerza aislada y la segunda está sometida a una carga uniformemente repartida y un par.

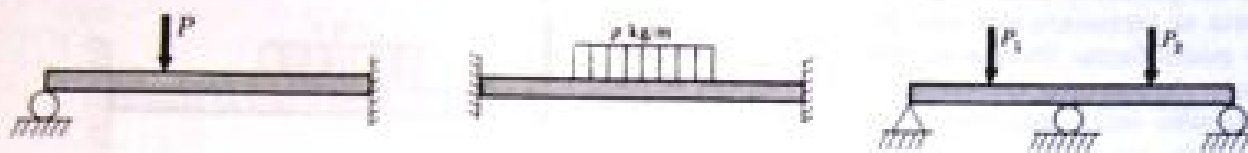
**VIGAS CON VOLADIZOS.** Una viga apoyada libremente en dos puntos y que tiene uno o los dos extremos que continúan más allá de esos puntos se llama viga con voladizos. A continuación aparecen dos ejemplos.



**VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS.** Todas las vigas consideradas antes, los voladizos, las simplemente apoyadas y las con voladizos extremos son tales, que se pueden determinar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones del equilibrio estático. Los valores de estas reacciones son independientes de las deformaciones de la viga. Se dice que son vigas estáticamente determinadas.

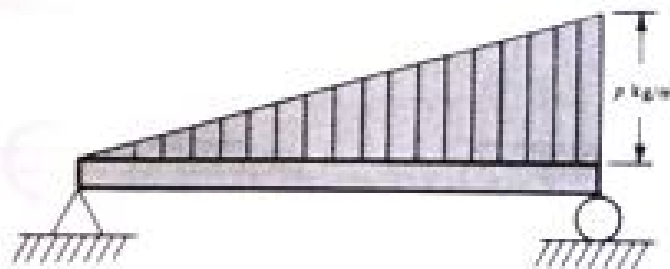
**VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS.** Si el número de reacciones que se ejercen sobre la viga excede del número de ecuaciones del equilibrio estático, hay que suplementar estas ecuaciones con otras basadas en las deformaciones de la viga. En este caso, se dice que ésta es estáticamente indeterminada.

Una viga en voladizo que está apoyada en el extremo, una viga empotrada rigidamente en los dos extremos y una viga que se extiende sobre tres o más apoyos son ejemplos de vigas indeterminadas. Tienen el aspecto de las figuras siguientes.



Este tipo de vigas se estudiará en el Capítulo II.

**TIPOS DE CARGAS.** Las cargas comúnmente aplicadas a una viga pueden consistir en fuerzas aisladas (aplicadas en un punto), cargas uniformemente repartidas, en cuyo caso se expresa la magnitud por cierto número de kilogramos por metro de longitud de viga, o cargas variables uniformemente, como se muestra a continuación.



Una viga puede estar cargada también por un par aplicado a ella. La magnitud del par se suele expresar en kg-m o kg-cm.

En este libro solo se considerarán cargas aplicadas gradualmente. Las cargas dinámicas o de impacto, en una viga, requieren un estudio de un tipo considerablemente más difícil.

**FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS EN VIGAS.** Cuando una viga está cargada con fuerzas y pares, en la barra se producen tensiones internas. En general, existen tensiones normales y cortantes. Para determinar su magnitud en cada sección es necesario conocer la fuerza y el momento resultantes que actúan en dicha sección, que pueden hallarse aplicando las ecuaciones del equilibrio estático.

Esto se verá, quizá, más fácilmente considerando como ejemplo un caso particular de cargas, como el de la Fig. 1, en que sobre una viga simplemente apoyada actúan varias cargas aisladas.



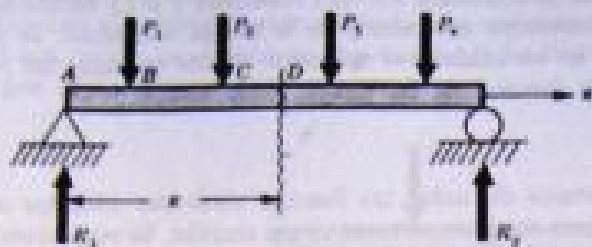


Fig. 1

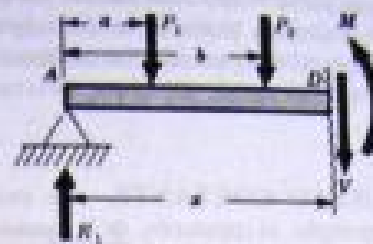


Fig. 2

Se quiere estudiar las tensiones internas en la sección  $D$ , situada a la distancia  $x$  del extremo izquierdo de la viga. Para ello consideremos que se corta la viga en  $D$  y que se suprime la parte de la derecha de esta sección. Deberá sustituirse la parte suprimida por el efecto que ejercía sobre el trozo de la izquierda, efecto que consiste en una fuerza cortante vertical juntamente con un par, representados por los vectores  $T$  y  $M$ , respectivamente, en el esquema de cuerpo en libertad de la parte izquierda de la viga, que se representa en la Figura 2.

La fuerza  $T$  y el par  $M$  mantienen la parte izquierda de la barra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas  $R_1, P_1, P_2$ . Se toman  $T$  y  $M$  positivas si tienen el sentido indicado arriba.

**MOMENTO RESISTENTE.** El par  $M$  representado en la Fig. 2 se llama momento resistente en la sección  $D$ . La magnitud de  $M$  puede hallarse utilizando una ecuación de la estática que expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a un eje que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano del papel, es cero. Así,

$$\Sigma M_0 = M - R_1 x + P_1(x - a) + P_2(x - b) = 0$$

$$M = R_1 x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

Por tanto, el momento resistente  $M$  es el producido en  $D$  por los momentos de la reacción en  $A$  y las fuerzas aplicadas  $P_1$  y  $P_2$ .  $M$  es el par resultante debido a las tensiones repartidas en la sección vertical  $D$ . Estas tensiones actúan en dirección horizontal y son tracciones en ciertas zonas de la sección y compresiones en otras. En el Capítulo 8 se estudiará con detalle su naturaleza.

**CORTANTE RESISTENTE.** La fuerza vertical  $T$  representada en la Fig. 2 de más arriba se llama cortante resistente en la sección  $D$ . Para que exista equilibrio de fuerzas en la dirección vertical

$$\Sigma F_v = R_1 - P_1 - P_2 - T = 0$$

$$T = R_1 - P_1 - P_2$$

Esta fuerza  $T$  es en realidad la resultante de las tensiones cortantes repartidas en la sección vertical  $D$ . La naturaleza de éstas se estudiará en el Capítulo 8.

**MOMENTO FLECTOR.** La suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores situadas a un lado de la sección  $D$ , respecto a un eje que pasa por  $D$ , se llama momento flector en  $D$ . Esto se representa por

$$R_1 x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

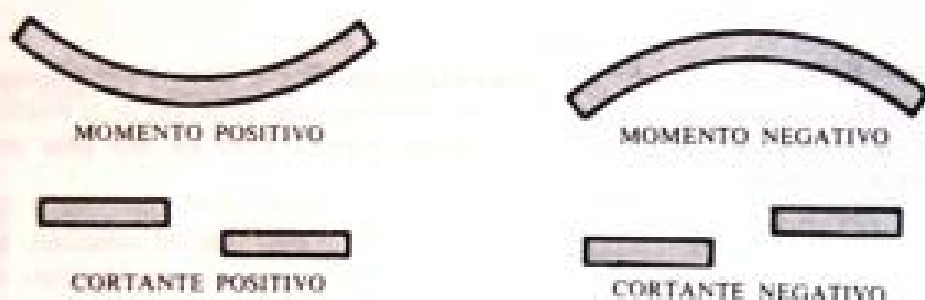
para las cargas consideradas antes. Esta magnitud se considera en los Problemas 1 a 15 inclusive. El momento flector es, pues, de sentido opuesto al momento resistente y de la misma magnitud. Se suele representar también por  $M$ . Normalmente se usa en los cálculos el momento flector en lugar del resistente, porque se puede expresar directamente en función de las cargas exteriores.

**ESFUERZO CORTANTE.** La suma algebraica de todas las fuerzas verticales situadas a un lado, por ejemplo, el izquierdo, de la sección  $D$  se llama esfuerzo cortante en esa sección. Se representa por

$$R_1 - P_1 - P_2$$

para las cargas anteriores. El esfuerzo cortante es de sentido opuesto y la misma magnitud que el cortante resistente. Generalmente se le representa por  $T$ . Se le suele usar en los cálculos en lugar del cortante resistente. Se considerará en los Problemas 1 a 15 inclusive.

**CRITERIO DE SIGNOS.** El criterio habitual de signos para el esfuerzo cortante y el momento flector aparece en los esquemas siguientes.



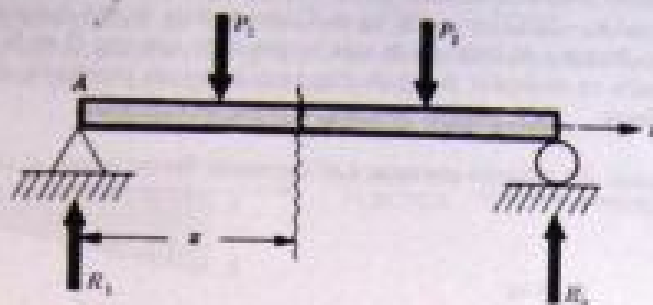
Así, una fuerza que tiende a flexar la viga de modo que la concavidad esté hacia arriba, como se representa en el esquema superior izquierdo, se dice que produce un momento flector positivo. Una fuerza que tiende a cortar la parte izquierda de la viga hacia arriba respecto a la parte derecha, como se indica en el esquema inferior izquierdo, se dice que produce un esfuerzo cortante positivo.

Un método más sencillo para determinar el signo algebraico del momento flector en una sección cualquiera es considerar que las fuerzas exteriores dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos y las dirigidas hacia abajo, momentos negativos.

**ECUACIONES DE CORTANTE Y MOMENTO.** Generalmente es conveniente introducir un sistema coordenado a lo largo de la viga con origen en un extremo de la misma. Es conveniente conocer el esfuerzo cortante y el momento flector en todas las secciones de la viga, para lo cual se escriben dos ecuaciones, una que da el esfuerzo cortante  $T$  en función de la distancia,  $x$ , a un extremo de ella, y la otra que da el momento flector  $M$  en función de  $x$ .

**DIAGRAMAS DEL ESFUERZO CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR.** La representación gráfica de estas ecuaciones en  $T$  y  $M$  se conoce como diagrama del esfuerzo cortante y del momento flector, respectivamente. En estos gráficos, las abscisas (horizontales) indican la posición de la sección a lo largo de la viga y las ordenadas (verticales) representan los valores del esfuerzo cortante y el momento flector, respectivamente. Por tanto, indican gráficamente la variación de esas dos magnitudes en una sección a lo largo de la barra. Es muy fácil determinar, con esos gráficos, el valor máximo de cada una de ellas.

**RELACION ENTRE ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.** Más abajo se representa una viga simplemente apoyada con varias cargas aplicadas. Se establece el sistema de coordenadas con origen en el extremo izquierdo *A* y las distancias a las diversas secciones de la viga se expresan por la variable *x*.



Para un valor cualquiera de *x*, el esfuerzo cortante *T* y el momento flector *M* están relacionados por la ecuación

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Esta relación se deduce en el Problema 7. Para aplicaciones, véanse los Problemas 8, 10, 12, 13.

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Escribir, para la viga en voladizo de la Fig. (a), las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cada punto de la barra. Dibujar, aproximadamente a escala, los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

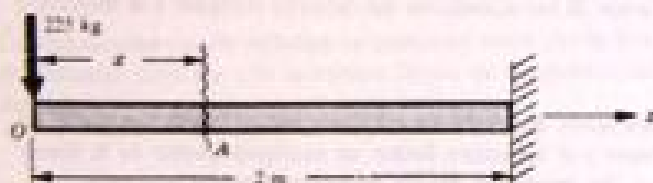


Fig. (a)



Fig. (b)

En este caso particular no es necesario determinar primero la reacción en el apoyo. Elijamos el eje de la viga como eje *x* de un sistema coordenado con origen *O* en el extremo izquierdo de la barra.

Consideremos una sección vertical cualquiera de la viga a la distancia general *x* del extremo izquierdo. La fuerza de 225 kg tiende a cortar la parte de viga a la izquierda de la sección *x*, hacia abajo, respecto a la parte de la derecha. Esto es, si se cortara la barra en esta sección, las dos partes se trasladarían a las posiciones relativas que se muestran en la Fig. (b), por lo que de acuerdo con nuestro criterio de signos es un cortante negativo. Por tanto, el esfuerzo cortante *T* en una sección cualquiera *x* es simplemente la suma algebraica de todas las fuerzas situadas a su izquierda, que en este caso es 225 kg. Así, pues,

$$T = -225 \text{ kg}$$

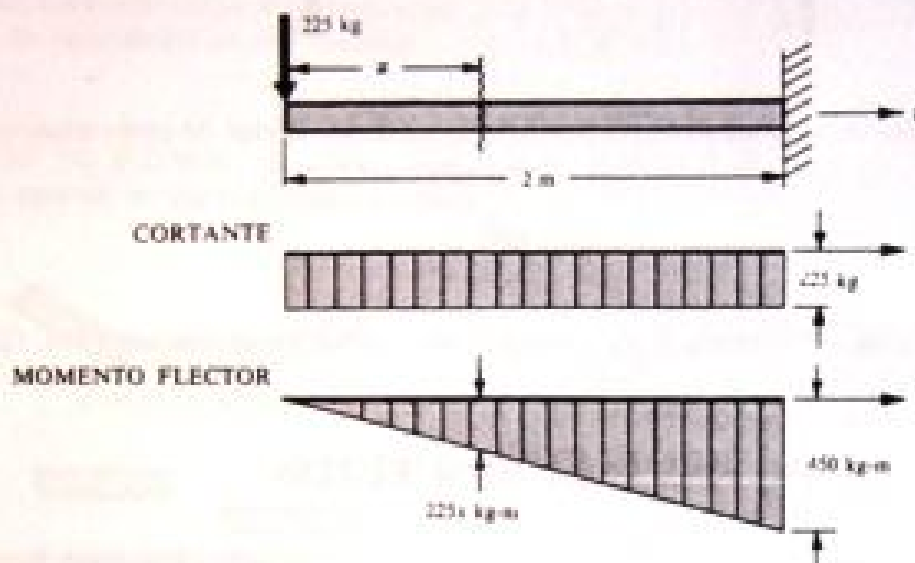
Además, nuestro criterio de signos dice que las fuerzas dirigidas hacia abajo producen momentos flectores negativos, por lo que el momento *M* en *x*, debido a la fuerza de 225 kg, es el momento de esta fuerza respecto a un eje perpendicular al plano del papel, que pasa por el punto *A*. La ecuación del momento flector es, pues,

$$M = -225x \text{ kg-m}$$

De la ecuación anterior del cortante es evidente que esta magnitud es constante a lo largo de toda la barra, por lo que su representación será una recta horizontal, cuya ordenada representa en cada punto el esfuerzo cortante de  $-225$  kg en el mismo. Como el esfuerzo cortante es negativo, esta horizontal estará trazada bajo el eje, como se ve en la segunda de las figuras de abajo.

La ecuación del momento flector indica que esta magnitud es cero en el extremo izquierdo de la viga, y en el derecho donde  $x = 2$  m toma el valor  $-225(2) = -450$  kg-m. Como se trata de una función de primer grado en  $x$ , la representación del momento flector a lo largo de la viga es una recta que une  $O$  en la izquierda con  $-450$  en el extremo derecho. La ordenada en cualquier punto de esta recta inclinada representa el momento flector en el punto de la viga correspondiente.

Por consiguiente, los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector tienen el aspecto que aparece a continuación.



Los dos últimos gráficos son, pues, las representaciones de las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector.

- Para la viga en voladizo sometida a una carga uniformemente repartida de  $p$  kg por metro lineal, representada en la Fig. (a), escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cualquier punto de la barra. Dibujar además los diagramas del esfuerzo cortante y del momento flector aproximadamente a escala.

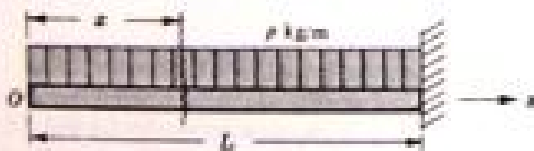


Fig. (a)

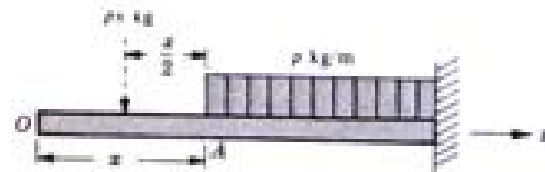


Fig. (b)

Tampoco ahora es necesario hallar las reacciones en el muro de apoyo. Elegiremos el eje de la viga como eje  $x$  de un sistema coordinado, con origen  $O$  en el extremo izquierdo de la barra. Para determinar el esfuerzo cortante y el momento flector en una sección cualquiera de la viga, a una distancia  $x$  del extremo libre, podemos sustituir la parte de carga repartida a la izquierda de esta sección por su resultante. Como se ve en el vector de trazos de la Fig. (b), la resultante es una fuerza dirigida hacia abajo de  $p \cdot x$  kg, que actúa en el punto medio entre  $O$  y la sección  $x$ . Obsérvese que al calcular esta resultante no se incluye ninguna carga de las situadas a la derecha de la sección. La resultante tiende a cortar la parte de barra de la izquierda, hacia abajo respecto a la parte de la derecha. Por nuestro criterio de signos, constituye un cortante negativo.

El esfuerzo cortante en esta sección  $x$  es la suma de las fuerzas de la izquierda de dicha sección. En este caso, la suma es  $px$  kg dirigida hacia abajo; por tanto,

$$T = -px \text{ kg}$$

Esta ecuación indica que el cortante es cero para  $x = 0$ , y cuando  $x = L$ , es  $-pL$ . Como  $T$  es una función de primer grado de  $x$ , la representación del esfuerzo cortante es una recta que une estos valores en los extremos de la viga. Tiene el aspecto representado en la Fig. (c). La ordenada de cada punto de esta recta inclinada representa el esfuerzo cortante en el punto correspondiente de la viga.

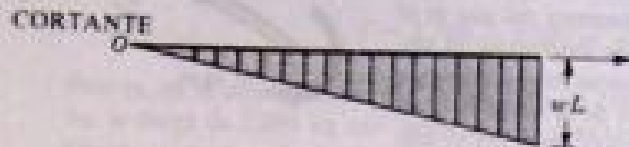


Fig. (c)



Fig. (d)

El momento flector en esta misma sección  $x$  está definido por la suma de los momentos de las fuerzas de su izquierda respecto a un eje que pasa por el punto  $A$  y es perpendicular al plano del papel. Esta suma de momentos está dada por el momento de la resultante,  $px$  kg, respecto a un eje por  $A$ . Es

$$M = -px(x/2) \text{ kg-m}$$

El signo menos es debido a que las cargas dirigidas hacia abajo indican momentos flectores negativos. Por esta ecuación vemos que el momento flector es nulo en el extremo izquierdo de la barra y  $-pL^2/2$  en el empotrado, en el que  $x = L$ . La variación a lo largo de la barra es parabólica y se puede representar como en la Fig. (c). La ordenada de esta parábola en cada punto representa el momento flector en el correspondiente punto de la viga.

Hay que observar que una carga uniforme dirigida hacia abajo como la considerada aquí produce un diagrama del momento flector con la concavidad hacia abajo, lo que podría haberse establecido tomando la segunda derivada de  $M$  respecto a  $x$ , que en este caso particular es  $-p$ . Como la segunda derivada es negativa, las reglas del cálculo nos dicen que la curva debe presentar su concavidad hacia abajo.

3. Considerar una viga en voladizo cargada solo con el par de 30 kg-m representado en la Fig. (a). Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la barra. Trazar los diagramas correspondientes.



Fig. (a)



Fig. (b)

Tampoco es necesario en este caso determinar la reacción del muro, aunque es evidente que debe consistir solo en un momento de magnitud 30 kg-m en sentido de las agujas del reloj. Elegiremos el eje de la viga como eje  $x$  del sistema coordinado de origen  $O$ , en el extremo izquierdo de la barra.

Este problema presenta ciertas características que no se daban en los anteriores porque el par no está aplicado en el extremo de la barra. El esfuerzo cortante en una sección cualquiera de la viga es la suma algebraica de las fuerzas verticales aplicadas a la izquierda de la sección elegida. Como el par no produce efecto de fuerza en ninguna dirección, no hay aplicadas a la barra fuerzas verticales y, por consiguiente, el esfuerzo cortante  $T$  es nulo para cualquier valor de  $x$ , lo que puede representarse gráficamente en el diagrama correspondiente por una recta horizontal que coincide con el eje, como se ve en la Figura (b).

Para determinar una ecuación del momento flector es evidente que a lo largo de la viga hay que considerar dos regiones diferentes. Una está constituida por los 1.8 m a la izquierda del par aplicado y la otra por los 1.2 m

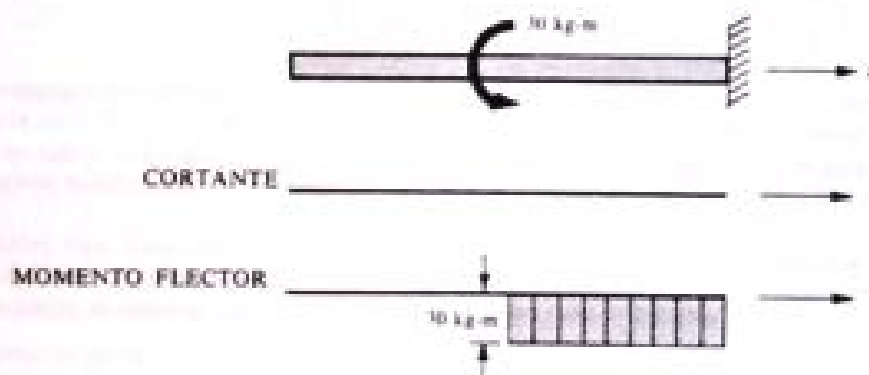
entre el par y el muro. Normalmente es conveniente expresar los valores de  $x$  en la primera región por  $0 < x < 1,8$  m

y los de la última por  $1,8 < x < 3$  m.

Si consideramos primero una sección cualquiera a la distancia  $x$  del extremo izquierdo, siendo  $0 < x < 1,8$ , el momento flector que está definido como la suma de los momentos de las fuerzas de la izquierda de la sección, respecto a un eje que pasa por ella y es perpendicular al plano del papel, es evidentemente nulo, pues esta zona no está sometida a ninguna carga aplicada. Para cualquier sección a la derecha del par de 30 kg-m, la suma de los momentos de las cargas aplicadas respecto al eje que pasa por ella es de 30 kg-m, porque el momento del par es el mismo respecto a todos los puntos del plano. Sin embargo, hay que determinar el signo algebraico del momento flector en esta zona, lo que puede hacerse muy fácilmente comprobando que el par de 30 kg-m ha de flexar la zona de 1,2 m de la derecha en la forma representada en la figura. Como la concavidad está hacia abajo, de acuerdo con el criterio de signos se trata de un momento negativo. Por tanto, la ecuación del momento flector en la sección  $x$  es de la forma

$$M = 0 \text{ para } 0 < x < 1,8 \text{ m}, \quad M = -30 \text{ kg-m para } 1,8 < x < 3 \text{ m}$$

A continuación se muestra la viga cargada junto con los gráficos de las ecuaciones de cortante y momento.



Es interesante considerar en lugar de la viga anterior de 3 m de longitud, otra de 1,2 m cargada en su extremo libre con un par de 30 kg-m. Se hallaría que los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector de toda esta viga de 1,2 m tienen el mismo aspecto indicado antes para la zona de 1,2 m de la derecha.

4. Considerar la viga simplemente apoyada sometida a una sola carga aislada de 2.000 kg, de la figura. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga y trazar los diagramas correspondientes.

Primero es necesario determinar las reacciones exteriores  $R_1$  y  $R_2$ . Tomando momentos respecto al punto  $O$ ,

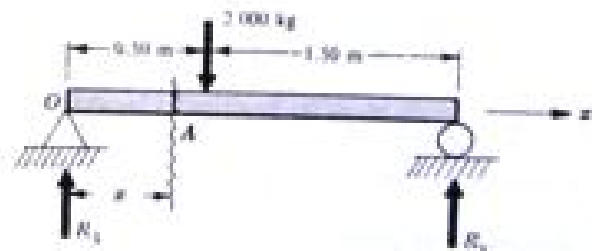
$$\sum M_O = 2R_2 - 2.000(0,5) = 0, \quad R_2 = 500 \text{ kg}$$

Para que exista equilibrio en la dirección vertical,

$$\sum F_v = R_1 + 500 - 2.000 = 0, \quad R_1 = 1.500 \text{ kg}$$

Introduciremos también un eje  $x$  coincidente con el de la viga y con origen en el extremo izquierdo de la misma.

Consideremos el esfuerzo cortante vertical en una sección cualquiera a la distancia  $x$  del extremo izquierdo. Si nos limitamos primero a la zona de la izquierda de la carga de 2.000 kg, el esfuerzo cortante consiste en la re-





acción  $R_1 = 1.500 \text{ kg}$ , porque es la única fuerza a la izquierda de esa sección. Esta fuerza tiende a cortar la parte de viga de la izquierda de  $x$  hacia arriba, respecto al resto de la barra, esto es, con las posiciones relativas representadas en la figura adjunta. De acuerdo con nuestro criterio de signos, es un cortante positivo; por tanto, en esta zona a la izquierda de la carga.

$$T = 1.500 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0.5 \text{ m}$$

En cuanto  $x$  sobrepasa de  $0.5 \text{ m}$ , el esfuerzo cortante que es la suma de las fuerzas a la izquierda de  $x$  es

$$T = 1.500 - 2.000 = -500 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0.5 < x < 2.0 \text{ m}$$

Esto es, en la zona a la derecha de la carga de  $2.000 \text{ kg}$ , la reacción izquierda produce un esfuerzo cortante positivo, la carga de  $2.000 \text{ kg}$  uno negativo y la resultante está dirigida hacia abajo, siendo negativa. Para definir el esfuerzo cortante a lo largo de la viga son necesarias estas dos ecuaciones.

En la zona de la izquierda de la carga el momento flector en la sección  $x$  es el momento de la reacción de  $1.500 \text{ kg}$ , respecto a un eje perpendicular al plano del papel por  $A$ . Es igual a

$$M = 1.500x \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0.5 \text{ m}$$

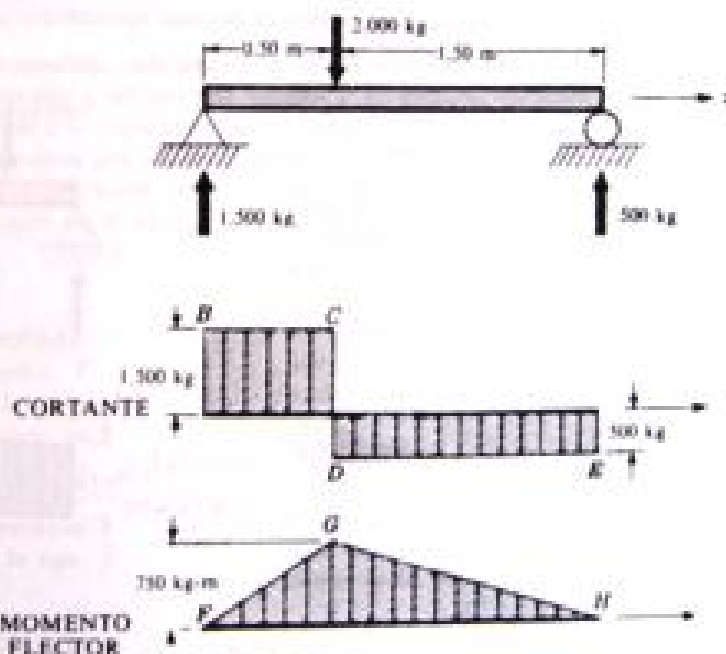
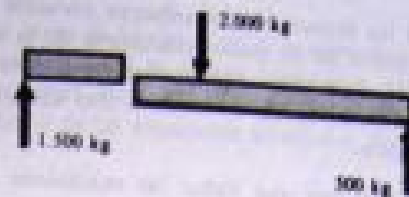
y es positivo, pues las fuerzas dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos. Cuando consideramos una sección a la derecha de la carga de  $2.000 \text{ kg}$ , el momento flector es debido parcialmente a la reacción de  $1.500 \text{ kg}$  y parcialmente a la carga de  $2.000 \text{ kg}$ . Su valor es

$$M = 1.500x - 2.000(x - 0.5) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0.5 < x < 2 \text{ m}$$

También son necesarias estas dos ecuaciones para definir esta magnitud a lo largo de la barra. Hay que observar que la primera expresión de  $M$  es cierta solamente si  $x$  es menor que  $0.5 \text{ m}$ . No hay posibilidad de combinar las dos ecuaciones en una que se cumpla en toda la viga.

Los gráficos de estas ecuaciones del cortante y el momento flector son muy sencillos. A la izquierda de la carga, el esfuerzo cortante es constante ( $1.500 \text{ kg}$ ) por lo que está representado por una horizontal  $BC$ , como se ve en el segundo de los esquemas que se acompañan. A la derecha es también constante ( $-500 \text{ kg}$ ), por lo que se representa por otra horizontal  $DE$ . El momento flector en la zona izquierda aumenta linealmente desde cero en el apoyo izquierdo hasta un valor máximo de  $750 \text{ kg-m}$  bajo la carga. En la parte derecha de la barra ha de ser también una función lineal de  $x$ , pues la ecuación es de primer grado y tiene el valor  $750 \text{ kg-m}$  bajo la carga y cero en el apoyo derecho. Así, pues, el diagrama del momento flector consta de dos segmentos rectilíneos,  $FG$  y  $GH$ , como se ve en el tercer esquema adjunto. Es siempre cierto que la parte de un diagrama de momentos flectores entre los puntos de aplicación de dos fuerzas aisladas es una línea recta.

Hay que observar que la magnitud de la discontinuidad o salto en el diagrama del cortante en  $x = 0.5 \text{ m}$  es igual a la magnitud de la fuerza aplicada en ese punto. Esto es cierto siempre en el punto de aplicación de la fuerza aislada.





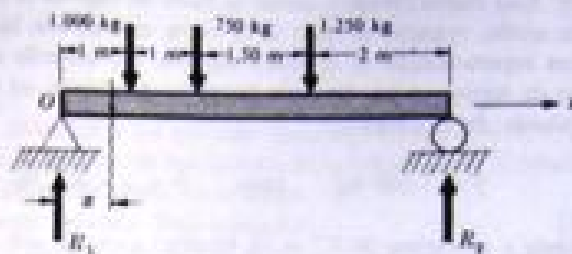
5. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y dibujar los diagramas correspondientes para la viga simplemente apoyada sometida a tres cargas aisladas de la figura.

Primero hay que hallar las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  por el equilibrio estático. Así:

$$\begin{aligned}\Sigma M_0 &= 5,50R_2 - 1,000(1) - 750(2) - 1,250(3,50) = 0 \\ \Sigma F_v &= R_1 + 1,250 - 1,000 - 750 - 1,250 = 0\end{aligned}$$

de donde  $R_2 = 1,250$  kg y  $R_1 = 1,750$  kg.

El eje  $x$  coincide con el de la viga y tiene su origen en el extremo izquierdo, como puede verse en la figura



Evidentemente, se necesitarán cuatro ecuaciones para definir el esfuerzo cortante y otras cuatro para el momento flector; pues hay otras tantas zonas entre las cargas aplicadas.

Examinemos primero el esfuerzo cortante. Recorriendo la viga de izquierda a derecha y recordando que el esfuerzo cortante en una sección a la distancia  $x$  del extremo izquierdo está dado por la suma algebraica de las fuerzas situadas a su izquierda, tenemos

$$T = 1,750 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

De acuerdo con nuestro criterio de signos, la reacción  $R_1$  produce cortante positivo.

$$T = 1,750 - 1,000 = 750 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 1 < x < 2 \text{ m}$$

De acuerdo con nuestro criterio de signos, la fuerza de 1,000 kg produce cortante negativo.

$$\begin{aligned}T &= 1,750 - 1,000 - 750 = 0 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 2 < x < 3,5 \text{ m} \\ T &= 1,750 - 1,000 - 750 - 1,250 = -1,250 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 3,5 < x < 5,5 \text{ m}\end{aligned}$$

Como el esfuerzo cortante es constante en cada una de estas zonas puede representarse por cuatro rectas horizontales a lo largo de toda la viga. Las ordenadas de estas horizontales tienen los valores hallados más arriba. En todos los problemas como el presente, en que intervienen cargas aisladas, el cortante negativo entre la última carga y  $R_2$  es siempre igual a la reacción  $R_2$  con signo contrario.

Ahora examinaremos el momento flector. Recorriendo la viga de izquierda a derecha y recordando que el momento flector en una sección  $x$  está definido como la suma algebraica de los momentos de las fuerzas a su izquierda respecto a un eje que pasa por ella y es perpendicular al plano del papel, tenemos

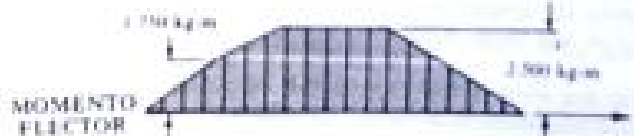
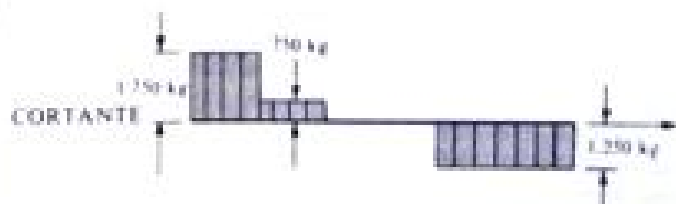
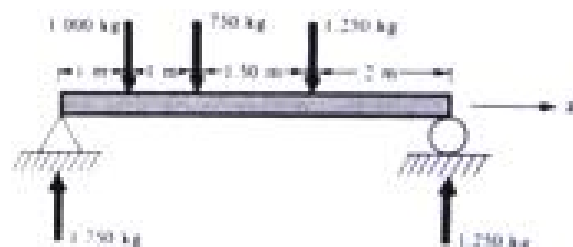
$$M = 1,750x \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

De acuerdo con nuestro criterio de signos, las fuerzas dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos y las hacia abajo, negativos.

$$M = 1,750x - 1,000(x - 1) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 1 < x < 2 \text{ m}$$

$$M = 1,750x - 1,000(x - 1) - 750(x - 2) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 2 < x < 3,5 \text{ m}$$

$$M = 1,750x - 1,000(x - 1) - 750(x - 2) - 1,250(x - 3,50) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 3,50 < x < 5,50 \text{ m}$$



Estas cuatro ecuaciones definen completamente el momento flector a lo largo de la viga y no se pueden sustituir por una ecuación única equivalente a las cuatro. Como todas ellas son funciones de primer grado en  $x$ , es evidente que se puede representar el momento flector por cuatro segmentos de recta. Para ello no es necesario más que determinar tres ordenadas, una bajo cada carga, que se obtienen fácilmente de las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, bajo la carga de 1.000 kg, el momento flector es

$$M_{x=1} = 1.750(1) = 1.750 \text{ kg-m}$$

Bajo la segunda carga, podemos usar la ecuación para  $1 < x < 2$  haciendo  $x$  igual a 2 m. Hallamos así

$$M_{x=2} = 1.750(2) - 1.000(2 - 1) = 2.500 \text{ kg-m}$$

Bajo la carga de 1.250 kg, utilizaremos la ecuación para  $2 < x < 3.5$  m. Así, pues,

$$M_{x=3.5} = 1.750(3.50) - 1.000(3.50 - 1) - 750(3.50 - 2) = 2.500 \text{ kg-m}$$

Como los dos extremos de la barra están simplemente apoyados, el momento flector en esos puntos es cero.

Más arriba se han dibujado los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector, así como un esquema de la viga. Los dos primeros gráficos muestran la variación del cortante y el momento en cada punto de la viga.

6. Considerar la viga de 4 m de longitud simplemente apoyada y sometida a una carga vertical uniformemente repartida de 210 kg por metro lineal de la Fig. (a). Trazar los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

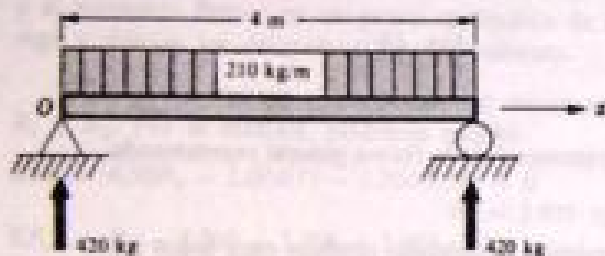


Fig. (a)

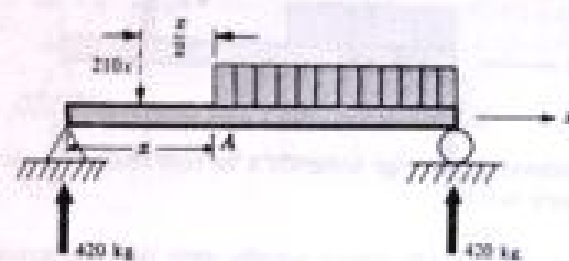


Fig. (b)

La carga total de la viga es de 840 kg y, por simetría, cada una de las reacciones es de 420 kg. Consideremos ahora una sección cualquiera de la viga a la distancia  $x$  del extremo izquierdo. El esfuerzo cortante en esta sección está dado por la suma algebraica de las fuerzas a su izquierda y estas fuerzas constan de la reacción de 420 kg y la carga repartida de 210 kg/m que se extiende sobre una longitud de  $x$  metros. Podemos sustituir la parte de carga repartida a la izquierda de la sección  $x$  por su resultante, de  $210x$  kg dirigida hacia abajo y representada por el vector de puntos de la Fig. (b). En esta resultante no se incluye ninguna carga de la derecha de  $x$ . Por tanto, el esfuerzo cortante en  $x$  está dado por

$$T = 420 - 210x \text{ kg}$$

Como sobre la viga no actúan cargas aisladas, esta ecuación es válida en todos sus puntos. Evidentemente,  $T$  varía linealmente desde  $T = 420$  kg en  $x = 0$  hasta  $T = 420 - 840 = -420$  kg en  $x = 4$  m. Por tanto, se puede representar la variación del esfuerzo cortante a lo largo de la viga por una recta que une esos dos valores en los puntos extremos. Este diagrama se representa en la Fig. (c). El cortante es cero en el centro de la viga.

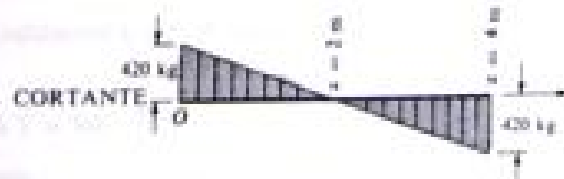


Fig. (c)

El momento flector en la sección  $x$  está dado por la suma algebraica de los momentos de la reacción de 420 kg y la carga repartida de  $210x$  kg, respecto a un eje por  $A$  perpendicular al plano del papel. Recordando que las fuerzas dirigidas hacia arriba dan momentos flectores positivos, tenemos



Fig. (d)

$$M = 420x - 210x(x/2) \text{ kg-m}$$

El alargamiento de este trozo viene dado por  $\Delta_2 = \frac{3.500(75)}{(5)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,025$  cm.

Del mismo modo, la fuerza que actúa sobre cualquier sección entre  $C$  y  $D$  ha de ser de 4.500 kg para mantener el equilibrio con la carga aplicada en  $D$ . En la Fig. (d) aparece el diagrama de cuerpo en libertad del segmento  $CD$ .



Fig. (c)



Fig. (d)

El alargamiento de esta parte viene dado por  $\Delta_3 = \frac{(4.500)(100)}{(5)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,043$  cm.

Por consiguiente, el alargamiento total es  $\Delta = 0,024 + 0,025 + 0,043 = 0,092$  cm.

4. La armadura Howe de la Fig. (a) soporta la carga única de 60.000 kg. Si se toma como carga de trabajo a tracción del material  $1.200 \text{ kg/cm}^2$ , determinar la sección necesaria de las barras  $DE$  y  $AC$ . Hallar el alargamiento de la barra  $DE$  en toda su longitud de 6 m. Se supondrá que el único factor a considerar para determinar el área buscada es el valor límite de la tensión de trabajo a tracción. Tomar como módulo de elasticidad de la barra  $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

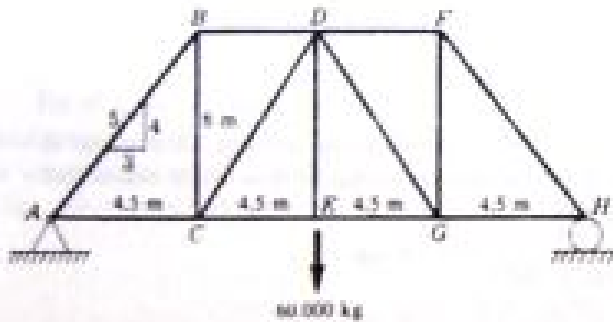


Fig. (a)

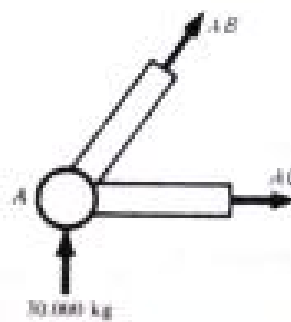


Fig. (b)

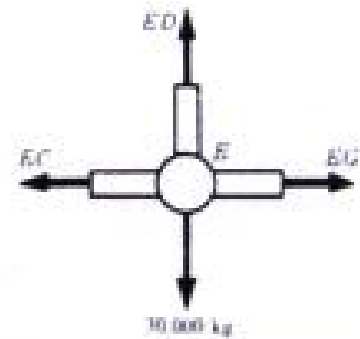


Fig. (c)

Esta armadura es estáticamente determinada exterior e interiormente, esto es, se pueden determinar las reacciones en los apoyos por medio de las ecuaciones del equilibrio estático, y se puede hallar la fuerza axial en cada barra por un estudio estático simple.

Primeramente es necesario determinar las reacciones verticales en  $A$  y  $H$ . Por simetría, son de 30.000 kg cada una. En la Fig. (b) aparece un diagrama del nudo  $A$  como cuerpo en libertad. En ella se han expresado las fuerzas desconocidas en las barras por la misma designación de dichas barras,  $AB$  y  $AC$ , y se ha supuesto que se trata de tracciones, por lo que si se halla para ellas valores positivos serán realmente fuerzas de tracción, mientras que si son negativas se tratará de compresiones, estando así los signos de acuerdo con el criterio habitual de suponer positivas las tracciones y negativas las compresiones. Aplicando la ecuación del equilibrio estático al diagrama de cuerpo en libertad anterior, tenemos

$$\Sigma F_y = 30.000 + \frac{4}{5}(AB) = 0 \quad \text{o} \quad AB = -37.500 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_x = \frac{3}{5}(-37.500) + AC = 0 \quad \text{o} \quad AC = 22.500 \text{ kg}$$

De igual modo, en la Fig. (c) aparece un diagrama de cuerpo en libertad del punto  $E$ . De la estática, tenemos

$$\Sigma F_y = ED - 60.000 = 0 \quad \text{o} \quad ED = 60.000 \text{ kg}$$

La consideración simple de las armaduras utilizada aquí supone que todas las barras son elementos de los que podrían llamarse de dos fuerzas, esto es, sometidos a tracción o compresión axiales, sin ninguna otra carga.

También esta ecuación es válida en toda la longitud de la viga. Hay que observar que como la carga está uniformemente repartida la resultante, expresada por el vector de trazos, actúa a la distancia  $x$  de  $A$ , esto es, en el centro de la carga uniforme de la izquierda de la sección  $x$  en que se calcula el momento flector. Por la ecuación anterior, es evidente que el momento flector a lo largo de la viga se representa por una parábola. Como la barra está simplemente apoyada, el momento es nulo en los dos extremos, y por la simetría de cargas debe ser máximo en el centro de la viga, donde  $x = 2$  m. En este punto, el momento flector vale

$$M_{x=2} = 420(2) - 105(2)^2 = 420 \text{ kg-m}$$

Por tanto, puede representarse la variación parabólica del momento flector a lo largo de la barra, por las ordenadas del diagrama de la Fig. (a) anterior.

7. Deducir una relación entre el esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de una viga.

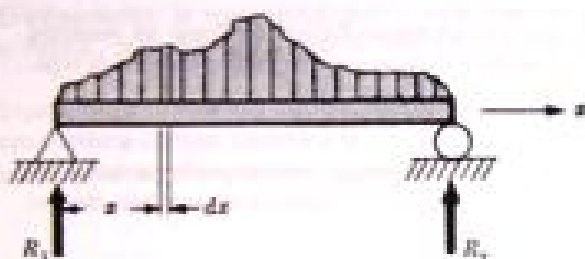


Fig. (a)

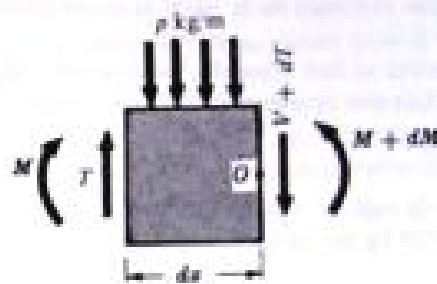


Fig. (b)

Consideremos una viga sometida a un tipo cualquiera de carga transversal de la forma general representada en la Figura (a).

Se han representado apoyos simples, pero las consideraciones siguientes se cumplen también para todos los tipos de vigas. Aislamos de la viga el elemento de longitud  $dx$  representado y tracemos un esquema de cuerpo en libertad. El esfuerzo cortante  $T$  actúa al lado izquierdo del elemento y, al recorrer la distancia,  $dx$  variará, en general, una pequeña cantidad hasta  $(T + dT)$ . En el lado izquierdo del elemento actúa el momento  $M$  y varía a  $(M + dM)$  en el lado derecho. Como  $dx$  es extremadamente pequeño, se puede suponer que la carga aplicada sobre él es uniforme e igual a  $p$  kg/m. El esquema de cuerpo en libertad del elemento aparece, entonces, como en la Fig. (b). Por el equilibrio de momentos respecto a  $G$ , tenemos

$$\sum M_G = M - (M + dM) + T dx - p(dx)\left(\frac{dx}{2}\right) = 0$$

$$\text{o} \quad dM = T dx + \frac{p}{2} (dx)^2$$

Como el último término es el producto de dos diferenciales, es despreciable comparado con los otros términos que solo tienen un diferencial. Por tanto,

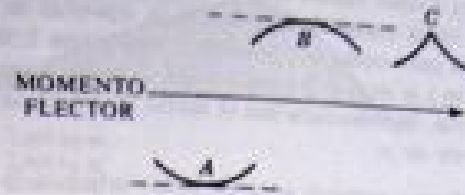
$$dM = T dx$$

$$\text{o} \quad T = \frac{dM}{dx}$$

Es decir, el esfuerzo cortante es igual a la variación del momento flector por unidad de variación de  $x$ .

Esta ecuación resultará de considerable valor para dibujar diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para los tipos de cargas más complicadas. Por ejemplo, de esta ecuación resulta evidente que si el esfuerzo cortante es positivo en una cierta sección de la viga, la pendiente del diagrama del momento flector es también positiva en ese punto. También demuestra que un cambio brusco del cortante, correspondiente a una carga aislada, va acompañado por un cambio brusco de la pendiente del diagrama del momento flector.

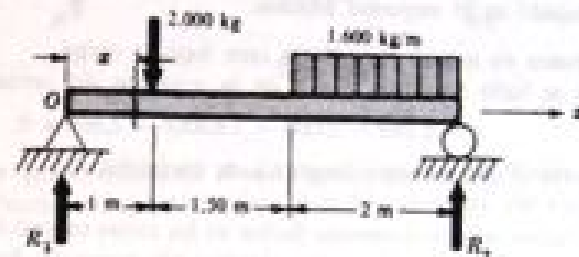
Además, en los puntos en que el cortante es nulo, la pendiente del diagrama de momentos flectores es nula. En estos puntos, en que la tangente del diagrama es horizontal, el momento debe tener un valor máximo o mínimo, como se deduce del método ordinario para hallar máximos y mínimos de una función, igualando a cero su derivada primera. Así, en los esquemas que se acompañan, si las curvas representan partes de un diagrama de momentos flectores, en los puntos *A* y *B* puede haber valores críticos.



Para determinar el sentido de la concavidad en un punto tal como el *A* o el *B* hallaremos la segunda derivada de *M* respecto a *x*, esto es,  $d^2M/dx^2$ . Si el valor de esta segunda derivada es positivo, el diagrama de momentos tiene la concavidad hacia arriba como en *A* y el momento presenta un valor mínimo. Si la segunda derivada es negativa, el diagrama de momentos presenta concavidad hacia abajo, como en *B*, y el momento adopta un valor máximo.

Sin embargo, hay que observar que el método de cálculo para hallar los valores críticos por medio de la primera derivada no indica los posibles máximos del diagrama de momentos de tipo cuspidal como el *C*, si existen. Si se presenta uno de esos puntos hay que determinar el momento en él numéricamente y compararlo con otros valores que pueden ser críticos.

8. Una viga simplemente apoyada está sometida a una fuerza aislada de 2.000 kg junto con una carga repartida de 1.600 kg por metro lineal, como se ve en la figura. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y dibujar los diagramas correspondientes.



Primero es necesario determinar las reacciones  $R_1$  y  $R_2$ . Por la estática, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= 4,50R_2 - 2.000(1) - 3.200(3,50) = 0, & R_2 &= 2.935 \text{ kg} \\ \sum F_v &= R_1 - 2.000 - 3.200 + 2.935 = 0, & R_1 &= 2.265 \text{ kg} \end{aligned}$$

Hay que observar que para determinar las reacciones exteriores es admisible siempre sustituir toda la carga repartida, que en este caso es de 1.600 kg/m, por su resultante, por lo que en la primera de las ecuaciones puede usarse esta resultante de 3.200 kg que, como la carga de 1.600 kg/m está repartida uniformemente, actúa en el centro de los 2 m sobre los que está distribuida ésta.

Introduciendo el eje *x* de la figura, con origen en el extremo izquierdo de la viga, es evidente que en la zona izquierda en la que  $0 < x < 1$  m, el esfuerzo cortante es debido exclusivamente a la reacción  $R_1$ , que tiende a cortar la parte izquierda de la viga hacia arriba respecto a la parte derecha, lo que constituye un cortante positivo, por lo cual

$$T = 2.265 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

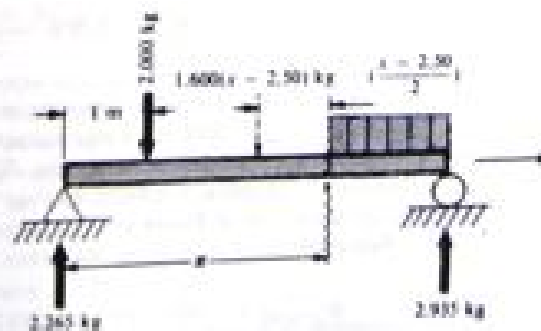
El cortante se representa, pues, en esta zona por una recta horizontal.

El esfuerzo cortante a la derecha de la carga de 2.000 kg está influenciado por  $R_1$  y la fuerza de 2.000 kg. Esta fuerza produce cortante negativo, y tenemos

$$T = 2.265 - 2.000 = 265 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 1 < x < 2,50 \text{ m}$$

También ahora se representa el cortante por una horizontal.

Para los valores de *x* mayores de 2.5 m, en la ecuación interviene la carga repartida de 1.600 kg/m. En contraste con la sustitución que hacemos de toda la carga repartida por su resultante para hallar las reacciones, hay que observar que ya no es posible



hacer esto. Como vamos recorriendo la viga de izquierda a derecha, solo podemos sustituir por su resultante la parte de carga repartida que está a la izquierda de la sección  $x$ . Es lo que se ha representado en la figura de más arriba para cualquier valor de  $x$  mayor que 2,50 m, donde la resultante corresponde a la carga situada entre  $x = 2,50$  m y la sección  $x$  considerada. Como la carga es de 1.600 kg/m y actúa sobre una longitud de  $(x - 2,50)$  m, la resultante, representada por el vector de trazos, es  $1.600(x - 2,50)$  kg y actúa en el punto medio de la carga de la izquierda de  $x$ .

El esfuerzo cortante en  $x$  es, como sabemos, la suma algebraica de las fuerzas situadas a su izquierda:

$$T = 2.265 - 2.000 - 1.600(x - 2,50) \text{ kg} \quad \text{para} \quad 2,50 < x < 4,50 \text{ m}$$

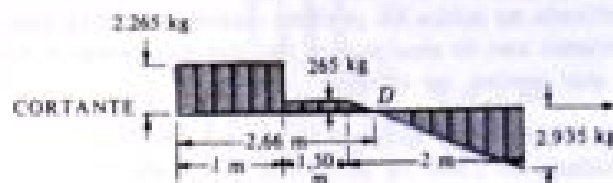
Así, pues, en esta zona el esfuerzo cortante es una función de primer grado en  $x$  y sus valores en los extremos se hallan fácilmente sustituyendo valores en ella. Sustituyendo  $x = 2,50$  m,

$$T_{x=2,5} = 265 \text{ kg}$$

Sustituyendo  $x = 4,50$  m,

$$T_{x=4,5} = -2.935 \text{ kg}$$

Ahora ya puede trazarse fácilmente el diagrama del esfuerzo cortante. En las partes izquierda y central de la barra se le representa por dos rectas horizontales con ordenadas 2.265 kg y 265 kg, respectivamente. En la parte derecha está representado por una recta inclinada que une las ordenadas 265 en  $x = 2,50$ , y  $-2.935$  en  $x = 4,50$ . Está dibujado en el esquema adjunto.



El punto en que el cortante es cero bajo la carga repartida se halla haciendo  $T = 0$  en la ecuación del cortante de esa zona. Haciendo esto, hallamos

$$2.265 - 2.000 - 1.600(x - 2,50) = 0, \quad \text{de donde} \quad x = 2,66 \text{ m}$$

Es el punto  $D$  del anterior diagrama de cortantes.

Las ecuaciones del momento flector en las zonas central e izquierda se hallan muy fácilmente. En una sección cualquiera  $x$  de una de estas dos regiones, el momento flector es

$$\begin{aligned} M &= 2.265x \text{ kg-m} && \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m} \\ \text{y} \quad M &= 2.265x - 2.000(x - 1) \text{ kg-m} && \text{para} \quad 1 < x < 2,50 \text{ m} \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones se ve que el momento es nulo en  $x = 0$  y vale 2.265 kg-m para  $x = 1$ . Por la segunda, se obtiene el momento en  $x = 2,50$  sustituyendo este valor:

$$M_{x=2,5} = 2.265(2,50) - 2.000(2,50 - 1) = 2.660 \text{ kg-m}$$

Por las dos ecuaciones anteriores, evidentemente el diagrama de momentos es una recta en cada una de las zonas. Estas rectas unen los valores en los puntos extremos de 0, 2.265 y 2.660 en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2,50$  m, respectivamente.

Para valores de  $x$  mayores que 2,50, en la ecuación de momentos entra la carga repartida. Para calcular el momento flector en una sección  $x$  de esta región es conveniente también sustituir la parte de la carga repartida situada a la izquierda de  $x$ , por su resultante, como se indica en el esquema anterior. Utilizando esta resultante para hallar el momento flector en  $x$  debido a la carga uniforme, hallamos,

$$M = 2.265x - 2.000(x - 1) - 1.600(x - 2,50)\left(\frac{x - 2,50}{2}\right) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 2,50 < x < 4,50 \text{ m}$$

Así, en esta región los momentos se representan por una parábola. Esto sucede siempre bajo una carga uniformemente repartida. Si se sustituye  $x = 2,50$  m en esta ecuación, se halla que el momento es 2.660 kg-m, como se halló utilizando la ecuación de la parte central de la viga. El extremo derecho de la barra está simplemente apoyado, por lo que el momento es nulo en  $x = 4,50$  m. Es muy interesante calcular el momento en  $x = 2,66$  m, pues es allí donde se anula el cortante. Por el Problema 7, como  $T = dM/dx$  la pendiente del diagrama de momentos en ese punto es cero. Sustituyendo  $x = 2,66$  m, hallamos

$$\begin{aligned} M_{x=2,66} &= 2.265(2,66) - 2.000(1,66) - 1.600(0,16)\left(\frac{0,16}{2}\right) \\ &= 2.700 \text{ kg-m} \end{aligned}$$



Ahora podemos ya trazar el diagrama de momentos. Consta de dos rectas en las regiones izquierda y central y una parábola en la parte derecha. Esta parábola tiene una tangente horizontal en  $x = 2,66$  m y, evidentemente, éste es el punto de máximo momento. A la derecha aparece el diagrama.



En el diagrama de cortantes puede observarse que solo hay un cambio gradual de cortante en  $x = 2,50$  m. Como  $T = dM/dx$  en todos los puntos de la barra, en el diagrama de momentos solo habrá un cambio gradual de pendiente en este punto. Por tanto, la recta y la parábola del diagrama de momentos tienen en  $x = 2,50$  m una tangente común.

9. Una viga simplemente apoyada está sometida al par de 250 kg-m representado en la Fig. (a). Trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores debidos a esta sollicitación.



Fig. (a)

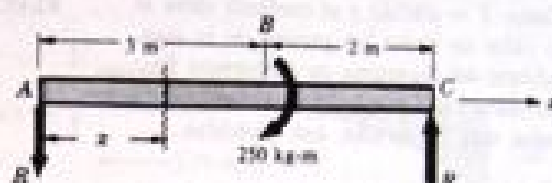


Fig. (b)

La viga está sometida a un par y la única manera de que se establezca el equilibrio es que las reacciones en los apoyos A y C constituyan otro par. Por tanto, estas reacciones aparecen como en la Fig. (b). Para que exista equilibrio,

$$\sum M_A = 5R - 250 = 0, \quad \text{de donde} \quad R = 50 \text{ kg}$$

Así, las dos fuerzas R representadas constituyen las reacciones necesarias para el equilibrio.

Adoptando el eje x de la figura con origen en el extremo izquierdo de la barra es evidente que en el estudio hay que considerar dos regiones. En la de la izquierda del par de 250 kg-m, el cortante es debido a la reacción izquierda R y tenemos

$$T = 50 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 3 \text{ m}$$

El momento flector en esta región es negativo, pues R va hacia abajo y está dado por

$$M = -50x \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 3 \text{ m}$$

En cuanto se pasa a la derecha del par aplicado de 250 kg-m debemos considerar de nuevo el cortante y el momento. Como un par no tiene efecto de fuerza en ninguna dirección, y está compuesto por dos fuerzas paralelas iguales y opuestas, el esfuerzo cortante es el mismo que en la región de la izquierda, es decir,

$$T = 50 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 3 < x < 5 \text{ m}$$

El momento flector consta del de la reacción izquierda respecto a un eje por la sección x y el del par de 250 kg-m. El signo algebraico del momento flector debido a este par puede determinarse suponiendo que actúa él solo en la región BC de la viga, en cuyo caso produce, evidentemente, una flexión del tipo representado en el esquema adjunto. De acuerdo con nuestro criterio de signos, es un momento positivo. Por tanto, el momento flector debido al par de 250 kg-m es positivo, y tenemos



$$M = -50x + 250 \quad \text{para} \quad 3 < x < 5 \text{ m}$$

Según esta ecuación, el momento en  $x = 3$  m es de 100 kg-m. En realidad, éste es el momento ligeramente a la derecha del punto de aplicación del par. También, de esta ecuación, en  $x = 5$  m,  $M = 0$ .

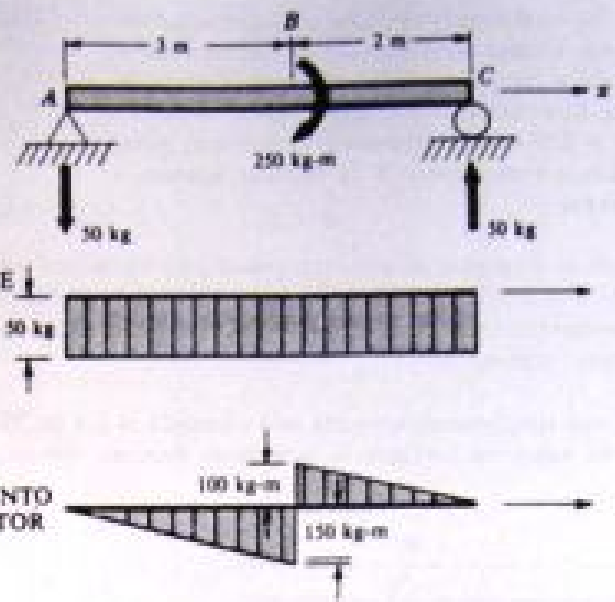


De acuerdo con la ecuación anterior para  $0 < x < 3$  m, el momento flector para  $x = 3$  m es  $-150$  kg-m. Este es realmente el momento inmediatamente a la izquierda del par aplicado. El momento en  $x = 0$  es nulo.

Así, pues, el cortante es constante e igual a  $-50$  kg en cualquier punto de la viga, y el diagrama del momento flector es una recta en cada una de las dos regiones. Es cero en los extremos y toma los valores  $-150$  kg-m y  $-100$  kg-m al lado izquierdo y al derecho de  $B$ , respectivamente. A la derecha aparecen los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

Como  $T = dM/dx$  y el cortante tiene el mismo valor en todos los puntos de la viga, la pendiente del diagrama de momentos flectores es constante, por lo que las dos rectas inclinadas que lo forman son paralelas.

De aquí se ve que cuando en una barra actúa un par, el diagrama del momento flector presenta una discontinuidad brusca o salto en el punto de aplicación del par.



10. La viga simplemente apoyada de la Fig. (a) soporta una carga vertical que aumenta uniformemente desde cero en el extremo izquierdo hasta un valor máximo de  $1.200$  kg/m lineal en el derecho. Dibujar los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

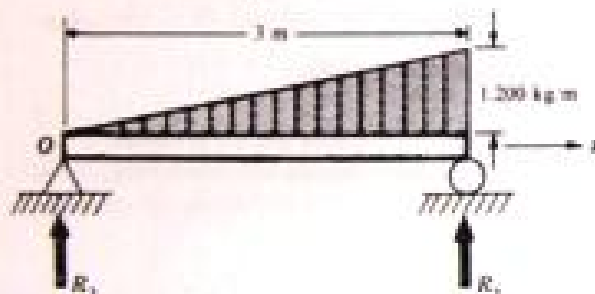


Fig. (a)

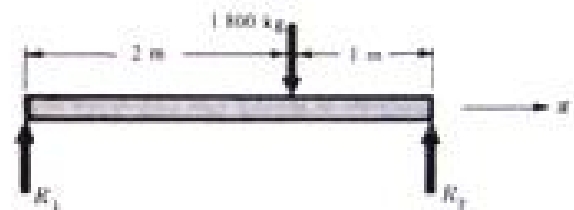


Fig. (b)

Para determinar las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  se puede sustituir toda la carga repartida por su resultante que actuará en el centro de gravedad del diagrama triangular de carga. Como la carga varía desde 0 a la izquierda hasta  $1.200$  kg/m en el extremo derecho, la intensidad media es de  $600$  kg/m y actúa sobre una longitud de 3 m. Por tanto, la carga total es de  $1.800$  kg y está aplicada a 2 m a la derecha del apoyo izquierdo. En la Fig. (b) se muestra el esquema de cuerpo libre a utilizar. Aplicando las ecuaciones del equilibrio estático a esta barra, hallamos  $R_1 = 600$  kg y  $R_2 = 1.200$  kg.

Sin embargo, para trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores no podemos usar esa resultante. Debemos considerar la carga repartida y determinar el cortante y el momento en una sección a la distancia  $x$  del extremo izquierdo, como se ve en la Fig. (c) adjunta. En esta sección  $x$  se puede hallar la intensidad  $p$  de carga por los triángulos semejantes  $OAB$  y  $OCD$  como sigue:

$$p/x = 1.200/3, \quad \text{de donde} \quad p = \left(\frac{x}{3}\right) 1.200 \text{ kg/m}$$

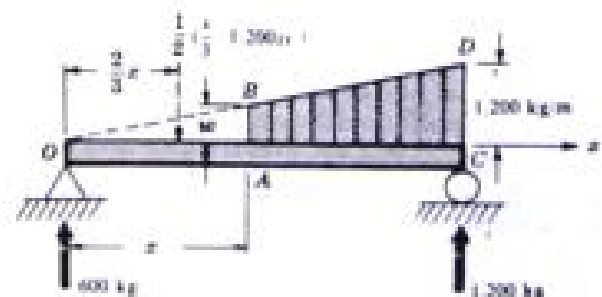


Fig. (c)

La intensidad media de la carga sobre la longitud  $x$  es  $\frac{1}{2}(\frac{x}{3}) 1.200 \text{ kg/m}$ , porque es nula en el extremo izquierdo. La carga total que actúa sobre la longitud  $x$  es igual a la intensidad media multiplicada por la longitud, o sea,  $\frac{1}{2}(\frac{x}{3}) 1.200)x \text{ kg}$ . Actúa en el centro de gravedad de la región triangular  $OAB$  de la figura, esto es, en un punto situado a la distancia  $\frac{1}{3}x$  de  $O$ . En la Fig. (c) anterior se ha representado por un vector de trazos la resultante de esta parte de carga repartida. No se ha incluido en esta resultante ninguna parte de la carga a la derecha de la sección  $x$ .

Ahora se halla que el esfuerzo cortante en  $A$  es  $T = 600 - \frac{1}{2}(\frac{x}{3}) 1.200)x = 600 - 200x^2$

y el momento flector en  $A$  está dado por  $M = 600x - \frac{1}{2}(\frac{x}{3}) 1.200)x (\frac{x}{3}) = 600x - \frac{200}{3}x^3$ .

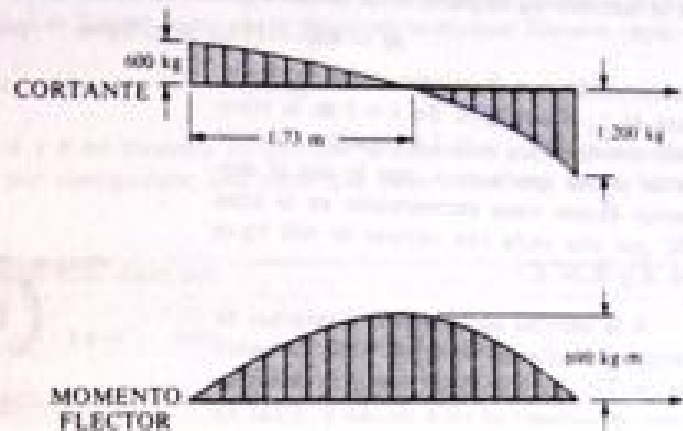
Estas ecuaciones son ciertas en toda la longitud de la viga. Por tanto, el esfuerzo cortante se representa por una parábola que tiene el valor  $600 \text{ kg}$  cuando  $x = 0$  y  $-1.200 \text{ kg}$  cuando  $x = 3 \text{ m}$ . El momento flector es un polinomio de tercer grado, que se anula en los extremos y adopta un valor máximo cuando el cortante es cero. Esto es cierto, porque  $T = dM/dx$  y el punto de cortante nulo será aquel en que la tangente al diagrama de momentos es horizontal. Este punto de cortante nulo puede hallarse haciendo  $T = 0$ :

$$0 = 600 - 200x^2, \text{ de donde } x = 1,73 \text{ m}$$

El momento flector en este punto se halla sustituyendo este valor en la ecuación general anterior:

$$\begin{aligned} M_{x=1,73} &= 600(1,73) - \frac{200}{3}(1,73)^3 \\ &= 690 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

Los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector aparecen en los esquemas de arriba.



11. La viga  $AC$  está apoyada en  $B$  y en  $C$  y sometida al par de  $400 \text{ kg-m}$  aplicado en  $A$ , como se muestra en la Fig. (a). Determinar las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.

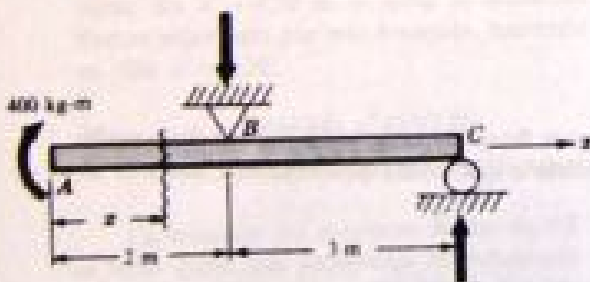


Fig. (a)

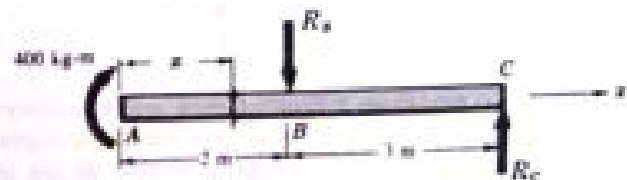


Fig. (b)

Se puede dibujar el esquema de cuerpo en libertad de la barra como en la Fig. (b), con la dirección que se supone positiva para las reacciones en  $B$  y  $C$  como se indica.

Para el equilibrio estático, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 400 - 3R_C = 0 & \text{o} & R_C = 133 \text{ kg} \\ \sum F_v &= -R_B + 133 = 0 & \text{o} & R_B = 133 \text{ kg} \end{aligned}$$

Como ambos resultados son positivos, los sentidos supuestos para  $R_B$  y  $R_C$  son correctos.

Se adopta un eje  $x$  como siempre, con origen en  $A$ . Recorriendo la viga de izquierda a derecha es evidente que en la zona  $AB$  no actúan esfuerzos cortantes verticales, por lo que podemos escribir

$$T = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

En una sección a la distancia  $x$  del extremo izquierdo, el momento flector es debido totalmente al par aplicado de  $400 \text{ kg}\cdot\text{m}$ . Es necesario determinar el signo algebraico de este momento, lo que puede hacerse con facilidad considerando que ese par produce una curvatura de  $AB$  con la concavidad hacia arriba, lo cual, por nuestro criterio de signos, significa que es positivo y tenemos que

$$M = 400 \text{ kg}\cdot\text{m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

Indudablemente, el momento debido a un par es el mismo en todos los puntos de un plano.

Para valores de  $x$  mayores de  $2 \text{ m}$ , en las ecuaciones del cortante y el momento interviene la reacción  $R_B$ . El esfuerzo cortante debido a  $R_B$  es negativo, pues tiende a cortar la región a la izquierda de una sección cualquiera  $x$  hacia abajo respecto a la región de la derecha. En consecuencia, tenemos

$$T = -133 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 2 < x < 5 \text{ m}$$

En  $BC$ , el momento flector a la distancia  $x$  de  $A$  es debido, en parte, al par de  $400 \text{ kg}\cdot\text{m}$  y, en parte al momento de la reacción  $R_B$  respecto al eje perpendicular al plano del papel, que pasa por la sección  $x$ , y tenemos

$$M = 400 - 133(x - 2) \text{ kg}\cdot\text{m} \quad \text{para} \quad 2 < x < 5 \text{ m}$$

Sustituyendo  $x = 2$  en esta ecuación, hallamos  $M_{x=2} = 400 \text{ kg}\cdot\text{m}$ . En  $x = 5 \text{ m}$ , la ecuación nos da  $M_{x=5} = 0$ . La ecuación anterior es de primer grado en  $x$ , por lo que el momento flector viene representado en la zona  $BC$  por una recta con valores de  $400 \text{ kg}\cdot\text{m}$  en  $B$  y  $0$  en  $C$ .

A la derecha aparecen los diagramas de cargas, de esfuerzo cortante y de momento flector. De acuerdo con la ecuación deducida antes, el cortante es nulo en  $AB$  y  $-133 \text{ kg}$  en  $BC$ ; por tanto, el gráfico consiste en dos rectas horizontales. El momento flector es constante ( $400 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ) en  $AB$  y disminuye linealmente hasta  $0$  entre  $B$  y  $C$ .

Hay que observar que podría haberse obtenido el diagrama de momentos, flectores en la zona  $BC$  más sencillamente introduciendo una nueva coordenada  $z$  considerada positiva hacia la izquierda y con origen en  $C$ . El momento flector se obtendría considerando el momento de las fuerzas a la derecha de esta sección designada por  $z$ . Evidentemente, es

$$M = 133z \quad \text{para} \quad 0 < z < 3 \text{ m}$$

positivo porque las fuerzas dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos. Muchas veces resulta conveniente utilizar este artificio de introducir una nueva coordenada  $z$  que crezca positivamente hacia la izquierda y considerar las fuerzas de la derecha de esa sección.

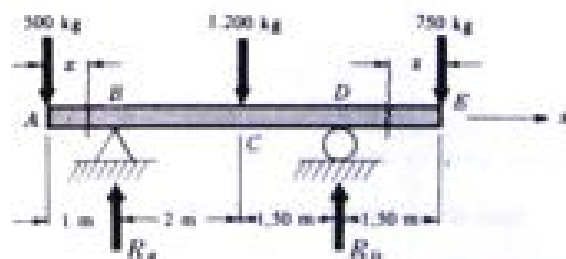
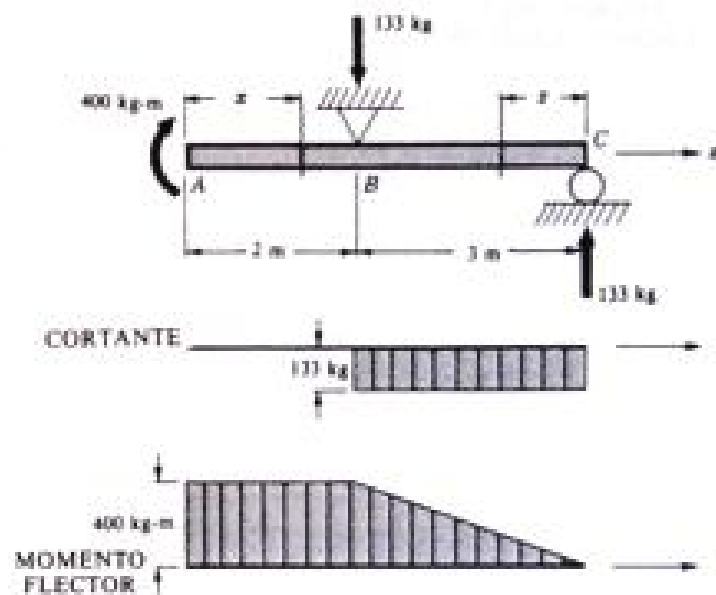
12. Considerar la viga con voladizos en los extremos, cargada con las tres fuerzas aisladas de la figura. Hallar las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y trazar los correspondientes diagramas.

Las reacciones se determinan fácilmente por la estática:

$$\sum M_B = 500(1) + R_D(3.50) - 1,200(2) - 750(5) = 0$$

$$\sum F_v = R_B + 1,615 - 500 - 1,200 - 750 = 0$$

de donde  $R_B = 1,615 \text{ kg}$  y  $R_D = 835 \text{ kg}$



El eje  $x$  coincide con el de la viga y tiene su origen en  $A$ . Es preferible conservar el origen en  $A$  durante todo el problema que moverlo sucesivamente a  $B$ ,  $C$ , etc., al estudiar las distintas partes de la viga.

Para un valor cualquiera de  $x$ , el esfuerzo cortante está dado simplemente por la suma algebraica de las fuerzas a su izquierda. Hay cuatro zonas entre fuerzas aisladas, por lo que para describir el cortante se necesitan cuatro ecuaciones:

- En  $AB$ ,  $T = -500$  kg para  $0 < x < 1$  m
- En  $BC$ ,  $T = -500 + 835 = 335$  kg para  $1 < x < 3$  m
- En  $CD$ ,  $T = -500 + 835 - 1.200 = -865$  kg para  $3 < x < 4,50$  m
- En  $DE$ ,  $T = -500 + 835 - 1.200 + 1.615 = 750$  kg para  $4,50 < x < 6$  m

Así, pues, en cada una de las cuatro zonas, el esfuerzo cortante es constante y se representa por una recta horizontal, como se ve en el diagrama de más abajo. Obsérvese que en el punto de aplicación de cada carga aislada, incluyendo las reacciones, el salto en la ordenada del diagrama de cortantes es igual en magnitud a la carga aplicada en ese punto.

En  $AB$  el momento flector está dado por el de la fuerza de 500 kg respecto a un eje perpendicular al plano del papel que pasa por la sección considerada  $x$ . Las fuerzas hacia abajo producen momentos flectores negativos, por lo que

$$M = -500x \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

El hecho de que la viga está en voladizo entre  $A$  y  $B$  no complica en absoluto la determinación del momento flector. El diagrama de momentos en  $AB$  es, por consiguiente, una recta que varía desde cero en  $A$  hasta  $-500$  kg-m en  $B$ .

En la zona siguiente,  $BC$ , el momento flector está dado por

$$M = -500x + 835(x - 1) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 1 < x < 3 \text{ m}$$

También se representa por una recta. El momento flector en  $x = 3$  m se halla sustituyendo este valor en la ecuación

$$M_{x=3} = -500(3) + 835(2) = 170 \text{ kg-m}$$

En la zona  $CD$ , el momento flector es

$$M = -500x + 835(x - 1) - 1.200(x - 3) \text{ para } 3 < x < 4,50 \text{ m}$$

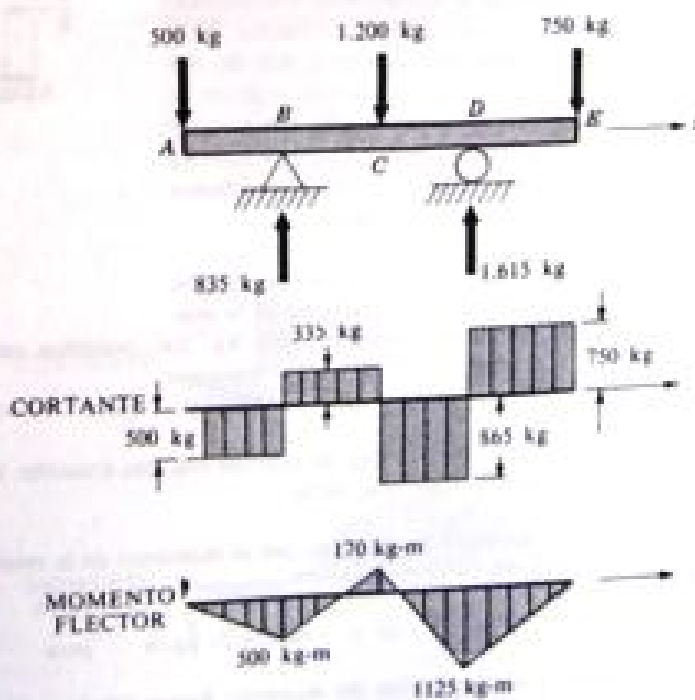
Nuevamente, la representación en  $CD$  es una recta. En  $x = 4,50$  m se halla el momento flector expresado por esta ecuación, haciendo en ella  $x = 4,50$ :

$$M_{x=4,50} = -500(4,50) + 835(3,50) - 1.200(1,50) = -1.125 \text{ kg-m}$$

La ecuación del momento flector en  $DE$  se halla quizá más fácilmente introduciendo una nueva coordenada  $z$  con origen  $E$  y positiva hacia la izquierda. En una sección  $z$ , el momento flector está dado por el momento de las fuerzas a su derecha respecto a un eje por  $z$  perpendicular al plano del papel. Por tanto, en  $DE$  tenemos

$$M = -750z \quad \text{para} \quad 0 < z < 1,50 \text{ m}$$

Su representación es una recta en la zona  $DE$ .



Así, pues, el diagrama del momento flector consta de una serie de rectas, como se ve más arriba.

Es de observar que en zonas como las  $BC$  y  $DE$  en las que el esfuerzo cortante es positivo, la pendiente del diagrama del momento flector es también positiva, lo que podía esperarse por la relación  $T = dM/dx$ . Del mismo modo, en  $AB$  y  $CD$  el esfuerzo cortante y la pendiente del diagrama del momento flector son negativas.

13. La viga  $ABC$  está simplemente apoyada en  $B$  y  $C$ , en voladizo en la parte  $AB$  y soporta una carga uniformemente repartida de  $160 \text{ kg/m}$  lineal de viga, como se ve en la Fig. (a). Dibujar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.

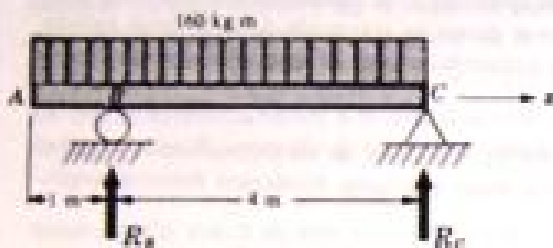


Fig. (a)

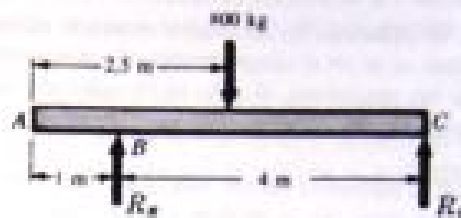


Fig. (b)

Para determinar las reacciones  $R_B$  y  $R_C$  se puede sustituir toda la carga repartida por su resultante. Esta es una fuerza de  $160 \text{ kg/m} \times 5 \text{ m} = 800 \text{ kg}$  que actúa en el centro de la carga, esto es, a  $2,5 \text{ m}$  de cada extremo. En el diagrama de cuerpo en libertad de la Fig. (b) se representa por un vector de  $800 \text{ kg}$ . Para que haya equilibrio estático,

$$\begin{aligned} \sum M_B &= R_C(4) - 800(1,50) = 0 & \circ & R_C = 300 \\ \sum F_v &= R_B - 800 + 300 = 0 & \circ & R_B = 500 \end{aligned}$$

Introduciremos un eje  $x$  que coincide con el de la viga con origen en  $A$ . Aunque este extremo está libre (no apoyado) sigue siendo más conveniente situar el origen en ese punto. Para determinar el esfuerzo cortante en una sección cualquiera de  $AB$  situada a la distancia  $x$  de  $A$ , podemos sustituir la parte de la carga de  $160 \text{ kg/m}$ , situada a la izquierda de esta sección, por su resultante. Esta vale  $160x \text{ kg}$  y actúa a una distancia  $x/2$  de  $x$ . En la Fig. (c) adjunta está indicada por el vector de trazos.

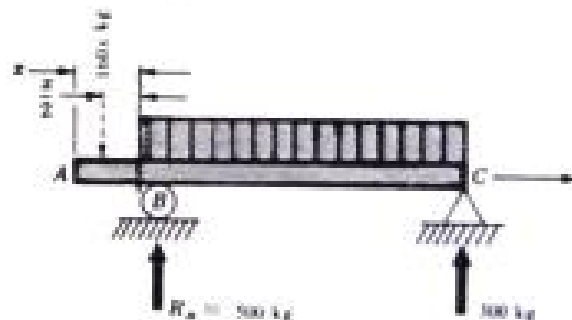


Fig. (c)

Por tanto, el esfuerzo cortante en esta sección  $x$  es la suma de las fuerzas a la izquierda de la misma representada por la resultante de  $160x \text{ kg}$ . Así, podemos escribir

$$T = -160x \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

En  $x = 1 \text{ m}$ , el cortante es  $-160 \text{ kg}$ , de acuerdo con esta ecuación. Por consiguiente, en esta zona el esfuerzo cortante viene representado por una recta.

El momento flector en  $x$  está dado por el momento de la resultante respecto a un eje por  $x$ , perpendicular al plano del papel. Vale

$$M = -160x(x/2) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

Evidentemente, la representación del momento flector a lo largo de la barra es parabólica en esta zona y varía desde cero en  $A$  hasta  $-80 \text{ kg-m}$  en  $B$ , como puede verse sustituyendo  $x = 1$  en la ecuación anterior. Para de-

terminar el sentido de la concavidad en el diagrama podemos hallar la segunda derivada de  $M$  respecto a  $x$ , lo que da

$$d^2 M/dx^2 = -160 \quad \text{para } 0 < x < 1 \text{ m}$$

El hecho de ser negativa la segunda derivada en cualquier punto de esta zona indica que la curva tiene la concavidad hacia abajo.

En cuanto pasamos a la región a la derecha de la reacción en el punto  $B$  hay que incluir esta fuerza aislada de 500 kg en la ecuación del esfuerzo cortante y en la del momento flector. Puede sustituirse también la parte de la carga repartida a la izquierda de una sección  $x$  por su resultante de  $160x$  kg dirigida hacia abajo, aplicada a una distancia  $x/2$  a la izquierda de dicha sección, como se ve en la Fig. (d) adjunta.

El esfuerzo cortante en  $x$  está dado por

$$T = -160x + 500 \quad \text{para } 1 < x < 5 \text{ m}$$

que se representa por una recta en la región  $BC$ . En  $x = 1$  m el cortante es

$$T_{x=1} = -160(1) + 500 = 340 \text{ kg}$$

en  $x = 5$  m, el cortante es

$$T_{x=5} = -160(5) + 500 = -300 \text{ kg}$$

El momento flector en  $x$  está dado por

$$M = -160x(x/2) + 500(x - 1) \quad \text{para } 1 < x < 5 \text{ m}$$

que se representa por una parábola. Sustituyendo  $x = 1$ , esta ecuación da

$$M_{x=1} = -160(1)(0,5) = -80 \text{ kg-m}$$

que coincide con el valor del momento flector en este punto, obtenido utilizando la ecuación para la zona  $AB$ . El momento flector para  $x = 5$  m es cero, como indica la ecuación anterior. Hallando nuevamente la derivada segunda de  $M$  respecto a  $x$ , en esta zona, tenemos

$$d^2 M/dx^2 = -160$$

por lo que esta parte de curva es también cóncava hacia abajo.

Los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector se pueden representar como en la figura.

Al trazar el diagrama del momento flector en  $BC$  es conveniente determinar primero la situación del punto  $D$  en el que es nulo el esfuerzo cortante. Puede hacerse tomando  $T = 0$  en la ecuación del esfuerzo cortante en  $BC$ :

$$0 = -160x + 500 \quad \text{o} \quad x = 3,125 \text{ m}$$

que sitúa al punto  $D$ . Como  $T = dM/dx$ , la tangente del diagrama del momento flector es horizontal en el punto  $D$  de cortante nulo. Es un valor crítico del momento que se suele estudiar. Debe recordarse que el método para determinar los máximos localiza los valores

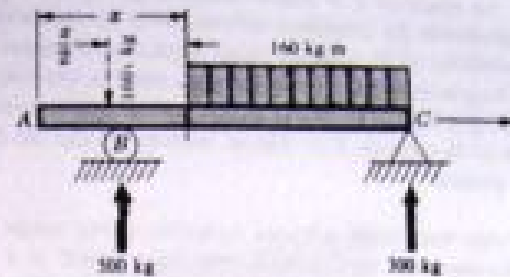
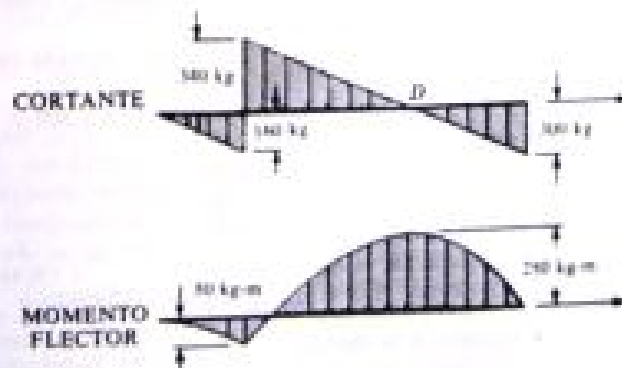
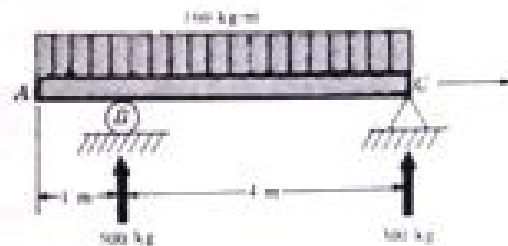


Fig. (d)





máximos como el  $D$ , pero no indica los del tipo cuspidal como el  $B$  del diagrama de momentos. Por tanto, hay que estudiar los puntos de cada tipo para determinar el momento flector máximo en una viga. El momento en el punto  $D$  se halla sustituyendo en la ecuación, que es

$$M_{x=5,125} = -80(3,125)^2 + 500(3,125 - 1) = 280 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

La ecuación  $T = dM/dx$  muestra que en las regiones como las  $AB$  y  $CD$ , en las que el cortante es negativo, la pendiente del diagrama del momento flector es también negativa. De igual modo en  $BC$ , en que el cortante es positivo, lo es también dicha pendiente. Además, como el cortante cambia bruscamente en  $B$ , la pendiente del diagrama de momentos flectores cambia bruscamente al pasar de la curva de la izquierda a la de la derecha de  $B$ , por lo que no puede existir una tangente común a las dos parábolas que constituyen el diagrama. El empleo de la relación  $T = dM/dx$  permite dibujar un diagrama de momentos flectores calculando sólo unos cuantos puntos.

14. La viga horizontal  $AD$  está sometida a una carga uniformemente repartida de  $800 \text{ kg/m}$  lineal y a una fuerza aislada de  $1.500 \text{ kg}$ , como puede verse en la figura. Dibujar el diagrama del esfuerzo cortante y el del momento flector en partes.

Por la estática, podemos escribir las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma M_A = 4R_C - 1.500(3) - 800(5,50)(2,75) = 0$$

$$\Sigma F_v = R_A + 4.150 - 1.500 - 800(5,50) = 0$$

de donde  $R_C = 4.150 \text{ kg}$  y  $R_A = 1.750 \text{ kg}$ .

Se adopta el eje  $x$  habitual con origen en el punto  $A$ . Hay que considerar tres regiones al estudiar el esfuerzo cortante, las  $AB$ ,  $BC$  y  $CD$ . De un modo totalmente análogo al seguido en el Problema 13, se pueden escribir las ecuaciones del cortante como sigue:

$$(1) \quad T = 1.750 - 800x \quad \text{para} \quad 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$(2) \quad T = 1.750 - 800x - 1.500 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 3 < x < 4 \text{ m}$$

$$(3) \quad T = 1.750 - 800x - 1.500 + 4.150 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 4 < x < 5,50 \text{ m}$$

De (1), el cortante en  $x = 0$  es  $1.750 \text{ kg}$ . Inmediatamente a la izquierda de la carga de  $1.500 \text{ kg}$ , el valor del cortante se halla sustituyendo  $x = 3 \text{ m}$  en (1); el resultado es  $-650 \text{ kg}$ . El cortante inmediatamente a la derecha de la carga de  $1.500 \text{ kg}$  se halla sustituyendo  $x = 3 \text{ m}$  en la ecuación (2), lo que da

$$T_{x=3} = 1.750 - 800(3) - 1.500 = -2.150 \text{ kg}$$

El cortante inmediatamente a la izquierda del punto  $C$  se halla sustituyendo  $x = 4 \text{ m}$  en la ecuación (2), lo que da

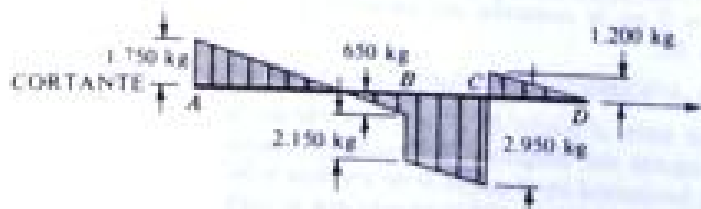
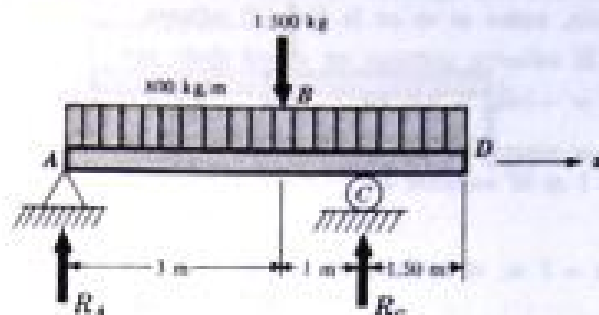
$$T_{x=4} = 1.750 - 800(4) - 1.500 = -2.950 \text{ kg}$$

El cortante inmediatamente a la derecha del punto  $C$  se halla sustituyendo  $x = 4 \text{ m}$  en (3); el resultado es

$$T_{x=4} = 1.750 - 800(4) - 1.500 + 4.150 = 1.200 \text{ kg}$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) es evidente que el diagrama del esfuerzo cortante es una recta en cada una de las tres regiones. Ya se han determinado los valores en los extremos de estos intervalos, por lo que se les puede representar y unir por rectas para hallar el diagrama representado a la derecha.

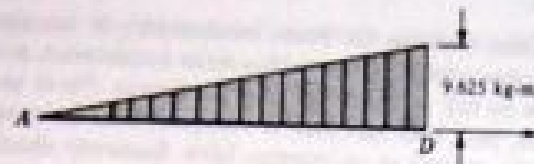
El diagrama del momento flector se hará de modo distinto que antes. El método a utilizar consistirá en considerar cada carga





en la barra por separado y dibujar el diagrama de momentos de ella sola, como si no actuara ninguna otra en la estructura. Se dice entonces que se traza el diagrama de momentos por partes. Como se verá en otro capítulo posterior que trata de la flexión de las vigas, este método es útil muchas veces, aunque la elección entre el y el clásico aplicado en los problemas precedentes depende del objeto para el que se dibuja el diagrama. Sobre esto se volverá a hablar más adelante.

Recorramos la viga de izquierda a derecha. Se puede considerar que el diagrama de momentos consta de cuatro partes, una debida a la reacción  $R_A$ , otra debida a la carga uniformemente repartida, una tercera producida por la fuerza de 1.500 kg, y la última a la reacción  $R_C$ . En una sección a la distancia  $x$  del punto  $A$ , el momento flector debido a  $R_A$  sola es igual a  $1.750x$  kg-m. Este valor es positivo porque  $R_A$  está dirigida hacia arriba. Esta misma expresión es válida para todos los valores de  $x$  a lo largo de la viga. Es una función de primer grado en  $x$ , por lo que el momento flector debido solo a  $R_A$  viene representado por una recta. En  $x = 0$ , el momento es nulo, y sustituyendo  $x = 5,50$  m en la expresión anterior, se ve que en el punto  $D$  es de 9.625 kg-m. Por tanto, el momento flector en una sección cualquiera  $x$  debido solamente a esta fuerza puede representarse por el triángulo que se muestra a la derecha.



Ahora consideraremos la carga uniformemente repartida. Se despreciarán todas las demás cargas provisionalmente y se calculará el momento flector producido en una sección  $x$  por la uniforme. Procederemos como antes, es decir, sustituiremos la parte de carga a la izquierda de la sección  $x$  por su resultante, indicada por el vector de trazos de la Figura (a).

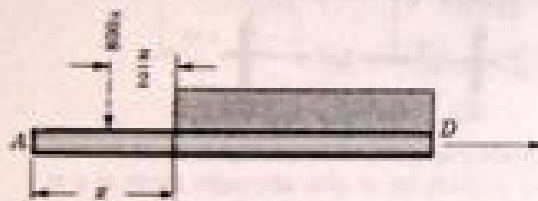


Fig. (a)

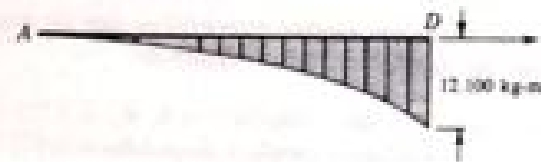


Fig. (b)

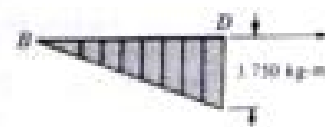
Debido solo a la carga repartida, el momento flector en una sección cualquiera  $x$  de la viga está dado por  $-800x(x/2)$  kg-m

Cuando  $x = 0$ , esta expresión se anula, y cuando  $x = 5,50$  m, es igual a 12.100 kg-m. Se representa por una parábola, pues la expresión es de segundo grado, como se ve en la Figura (b).

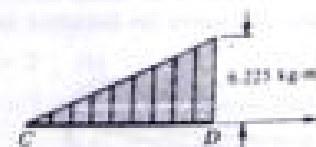
Al recorrer la viga de izquierda a derecha no aparece la influencia de la carga de 1.500 kg hasta que pasamos a la derecha de  $B$ . Desde este punto, en una sección cualquiera  $x$ , el momento flector debido solo a esta fuerza, despreciando provisionalmente todas las demás, está dado por

$$-1.500(x - 3) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 3 < x < 5,50 \text{ m}$$

Hay que observar que  $x$  se mide siempre desde el punto  $A$ . Cuando  $x = 3$  m, el momento flector debido a esta fuerza sola es nulo, y cuando  $x = 5,50$  m, tiene el valor  $-3.750$  kg-m. Es una expresión de primer grado en  $x$ , por lo que el momento flector debido a esta fuerza sola se representa por una recta en la región  $BD$ , como se muestra a la derecha.



El diagrama del momento flector debido a  $R_C$  sola se puede hallar de un modo análogo. En cuanto consideremos secciones en cualquier punto de la zona  $CD$ , la fuerza  $R_C$  dará origen a un momento flector. Debido a esta fuerza sola existe un momento de  $4.150(x - 4)$  kg-m para  $4 < x < 5,50$  m. Cuando  $x = 4$ , este valor es cero, y cuando  $x = 5,50$  m, es igual a  $4.150(5,50 - 4) = 6.225$  kg-m. Es una expresión de primer grado en  $x$ .



## Tabla de materias

CAPITULO	PAGINA
1. TRACCION Y COMPRESION.....	1
2. SISTEMAS DE FUERZAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS..	21
3. CILINDROS Y ESFERAS DE PAREDES DELGADAS.....	35
4. TENSIONES DE CORTANTE.....	44
5. TORSION.....	51
6. ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.....	67
7. CENTROS DE GRAVEDAD Y MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS PLANAS.....	97
8. TENSIONES EN VIGAS.....	110
9. DEFORMACION DE VIGAS. METODO DE LA DOBLE INTEGRACION.....	139
10. DEFORMACION DE VIGAS. METODO DEL AREA DE MOMENTOS.....	166
11. VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS.....	185
12. SOPORTES O COLUMNAS.....	205
13. UNIONES REMACHADAS O ROBLONADAS.....	219
14. UNIONES SOLDADAS.....	234
15. TENSIONES COMPUESTAS.....	240
16. ELEMENTOS CARGADOS EXCENTRICAMENTE Y ELEMENTOS SOMETIDOS A SOLICITACIONES COMBINADAS.....	271
17. HORMIGON ARMADO.....	282
INDICE.....	297

Para la carga axial, la tensión viene dada por  $\sigma = P/A$ , donde  $P$  es la fuerza axial y  $A$  la sección de la barra. En nuestro caso, la tensión es de  $1.200 \text{ kg/cm}^2$  en cada barra, por lo que las secciones serán

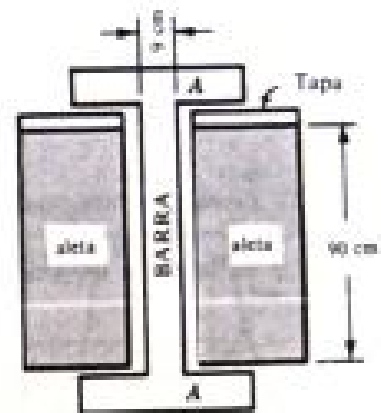
$$A_{ax} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_{ac} = \frac{22.500}{1.200} = 18,75 \text{ cm}^2$$

El alargamiento de la barra bajo la tracción axial viene dado por  $\Delta = \frac{PL}{AE}$ . Para la barra DE tenemos

$$\Delta = \frac{(60.000)(600)}{(50)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,34 \text{ cm}$$

5. En un dispositivo de cierre para asegurar la tapa de un depósito cilíndrico que contiene fluido a presión se ha usado una serie de barras prismáticas de sección rectangular de  $5 \times 9 \text{ cm}$ . La pared exterior del depósito de presión tiene unas aletas salientes soldadas a ella, encajando las barras prismáticas (en sentido lateral) entre dos aletas contiguas. Para asegurar el efecto de fijación, la barra está mecanizada de modo que es demasiado corta en sus cabezas (A) para encajar sobre la tapa del depósito, que apoya en la parte superior de las aletas. A la temperatura ambiente le faltan  $25 \text{ mm}$ . Se calienta la barra (pero no las aletas) de forma que pueda deslizarse sobre la parte superior del depósito, y después de enfriarse ejerce una fuerza normal a dicha parte superior.

Si la superficie total de apoyo en cada extremo de la barra (superficie en contacto con la parte superior del depósito) es de  $45 \text{ cm}^2$ , hallar la presión unitaria que ejerce cada barra sobre el depósito, así como la temperatura a que habría que calentarlas para que entrasen justo en la tapa. Las barras son de acero, para el cual  $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .



$$0,25 = (11 \cdot 10^{-6})(90)(\Delta T), \quad \text{de donde} \quad \Delta T = 252^\circ$$

La fuerza axial necesaria para alargar la barra esta misma cantidad es  $P$ , siendo

$$0,25 = \frac{P(90)}{(45)(2,1 \cdot 10^6)} \quad \text{y} \quad P = 262.500 \text{ kg}$$

Se supone que la presión está uniformemente repartida sobre la superficie de apoyo entre la cabeza y la parte superior del depósito, por lo que dicha presión es

$$\frac{262.500}{45} = 5.800 \text{ kg/cm}^2$$

6. Determinar el aumento total de longitud de una barra de sección constante, colgada verticalmente y sometida como única carga a su propio peso. La barra es recta inicialmente.

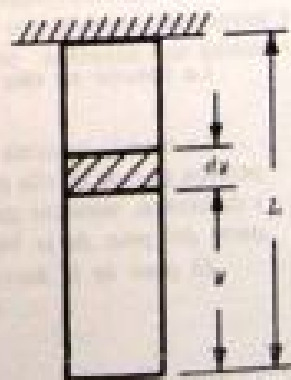
La tensión normal (tracción) en una sección horizontal está producida por el peso de material situado debajo de esa sección. El alargamiento del elemento  $dy$  de la figura es

$$d\Delta = \frac{(A\gamma y) dy}{AE}$$

donde  $A$  representa la sección de la barra y  $\gamma$  su peso específico (peso/volumen unidad). Integrando, el alargamiento total de la barra es

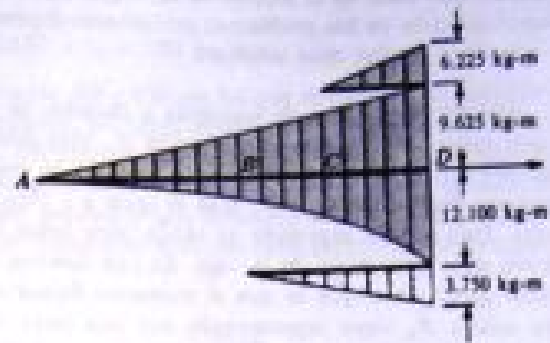
$$\Delta = \int_0^L \frac{A\gamma y}{AE} dy = \frac{A\gamma}{AE} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{(A\gamma L)L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

donde  $W$  indica el peso total de la barra. Hay que observar que el alargamiento total producido por el peso es igual al producido por una carga mitad de dicho peso, aplicada en el extremo.



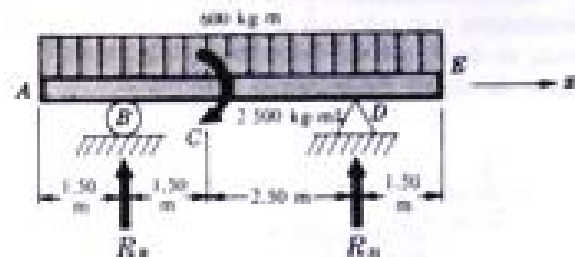
por lo que el diagrama del momento flector debido a  $R_C$  sola aparece también como un triángulo, según se representa en la página anterior.

Se han obtenido ya los diagramas de momentos debidos a cada una de las cargas, como si solo actuara una de ellas sobre la viga. En la realidad, indudablemente, todas las cargas actúan simultáneamente, por lo que el verdadero valor del momento en cada punto es la suma algebraica de los valores indicados en los cuatro gráficos anteriores. Es costumbre dibujar todos esos diagramas individuales juntos, como se ve a la derecha.



Obsérvese que las bases horizontales de los dos diagramas triangulares pequeños están desplazadas, por lo que no hay solape de las distintas figuras. No es necesario, pero hace más fácil la interpretación. La suma algebraica de las cuatro ordenadas en D es cero, lo que es lógico porque es un extremo libre. Sumando ahora las ordenadas de los distintos diagramas en cada punto se puede obtener el tipo de diagrama compuesto estudiado en los problemas anteriores. Entre A y B solo intervendrían en la suma dos cantidades; entre B y C, tres, y entre C y D, cuatro.

15. La viga  $AE$  está simplemente apoyada en  $B$  y  $D$ , tiene ambos extremos en voladizo y está sometida a una carga uniformemente repartida de  $600 \text{ kg}$  por metro lineal y a un par de magnitud  $2.500 \text{ kg-m}$  aplicado en  $C$ . Dibujar el diagrama de esfuerzos cortantes y el de momentos flectores en partes.



Las reacciones pueden determinarse por las ecuaciones del equilibrio estático siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 4R_D - 2.500 - 600(7)(2) = 0, & R_D &= 2.725 \text{ kg} \\ \Sigma F_v &= R_B + 2.725 - 600(7) = 0, & R_B &= 1.475 \text{ kg} \end{aligned}$$

Se introduce un eje  $x$  con origen en el punto  $A$ . En la región  $AB$ , el esfuerzo cortante en una sección cualquiera a la distancia  $x$  del punto  $A$  está dado por la resultante de la carga repartida a su izquierda. Esta resultante es, evidentemente, una fuerza de  $600x \text{ kg}$  dirigida hacia arriba. Así, tenemos

$$(1) \quad T = -600x \quad \text{para} \quad 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

Sustituyendo  $x = 1,50 \text{ m}$ , esta ecuación nos da un valor del cortante en ese punto, de  $-900 \text{ kg}$ . El cortante en  $x = 0$  es, indudablemente, cero.

En cuanto pasamos a la derecha de  $B$ , en la ecuación del esfuerzo cortante aparece la reacción  $R_B$ . En la región  $BD$ , para una sección cualquiera a la distancia  $x$  de  $A$ , el cortante se obtiene sumando las fuerzas aplicadas a su izquierda. Esta suma está dada por

$$(2) \quad T = -600x + 1.475 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 1,50 < x < 5,50 \text{ m}$$

Obsérvese que en la ecuación del esfuerzo cortante no entra el par aplicado en  $C$ , porque un par no ejerce efecto de fuerza en ninguna dirección. Sin embargo, entra indirectamente, pues influye en los valores de las reacciones  $R_B$  y  $R_D$ . Sustituyendo  $x = 1,50 \text{ m}$  y  $x = 5,50 \text{ m}$  en (2),

$$T_{x=1,5} = 575 \text{ kg} \quad \text{y} \quad T_{x=5,5} = -1.825 \text{ kg}$$

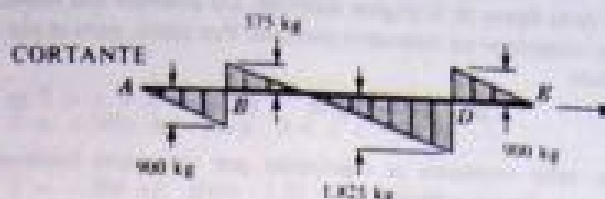
Al considerar valores de  $x$  mayores de  $5,50 \text{ m}$  hay que incluir la reacción  $R_D$  en la ecuación del esfuerzo cortante. Sumando las fuerzas a la izquierda de una sección  $x$  de la región  $DE$ , hallamos

$$(3) \quad T = -600x + 1.475 + 2.725 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 5,50 < x < 7 \text{ m}$$

Sustituyendo  $x = 5,50 \text{ m}$  y  $x = 7 \text{ m}$  en esta ecuación (3), hallamos

$$T_{x=5,5} = 900 \text{ kg} \quad \text{y} \quad T_{x=7} = 0 \text{ kg}$$

El esfuerzo cortante en un punto cualquiera de la barra está definido por una de las tres ecuaciones (1), (2) o (3), según la región en que esté el punto  $x$ . Como  $T$  es una función de primer grado en  $x$  en cada una de las regiones, el diagrama de esfuerzos cortantes está constituido por una recta en cada una de ellas. Ya se han obtenido, por sustitución, los valores en los extremos de cada región. En  $AB$  son 0 y  $-900$  kg. En  $BD$ ,  $575$  y  $-1.825$  kg. Finalmente, en  $DE$  se halló que eran  $900$  kg, 0. Se pueden representar estos valores en los puntos correspondientes de la viga y unir por una recta en cada región las ordenadas correspondientes.



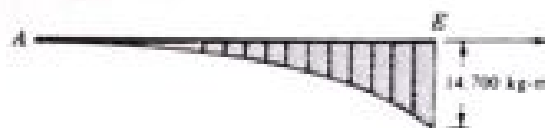
La magnitud del salto vertical en cada uno de los puntos  $B$  y  $D$  es, indudablemente, igual al valor de las reacciones  $R_B$  y  $R_D$  aplicadas en esos puntos.

Para trazar por partes el diagrama de momentos flectores se considera individualmente cada una de las cargas, incluyendo las reacciones, como si no actuara sobre la viga ninguna otra. Empezando por la carga uniforme de  $600$  kg/m se considera una sección a la distancia  $x$  del extremo izquierdo  $A$  y se calcula el momento flector producido solamente por la carga repartida. La resultante de las fuerzas repartidas a la izquierda de esta sección está representada en la figura anterior por el vector de trazos. El momento de esta resultante respecto a un eje que pasa por la sección  $x$  y es perpendicular al plano del papel es



$$M = -600x(x/2) = -300x^2 \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 7 \text{ m}$$

Por tanto, el diagrama de momentos correspondiente a la carga repartida sola es parabólico. En  $x = 0$  el momento es nulo y en el extremo derecho,  $x = 7$  m, la ecuación anterior nos da el valor:



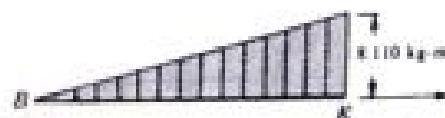
$$M_{x=7} = -300(7)^2 = -14.700 \text{ kg-m}$$

Así, pues, esta «parte» del diagrama de momentos tiene el aspecto que aparece en la figura de arriba.

Como estamos recorriendo la viga de izquierda a derecha no se considera el momento debido a la reacción  $R_B$  hasta que intervienen valores de  $x$  mayores de  $1,50$  m. Entonces, debido a esta carga sola, el momento de esta fuerza de  $1.475$  kg respecto a un eje por la sección  $x$  está dado por

$$M = 1.475(x - 1,50) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 1,50 < x < 7 \text{ m}$$

Como es una función de primer grado en  $x$ , el momento flector debido a  $R_B$  sola, se representa por una recta. De acuerdo con esta ecuación, el momento es nulo en  $x = 1,50$  m y vale  $1.475(7 - 1,50) = 8.110$  kg-m en el punto  $E$ . Estos dos valores en los extremos se pueden unir mediante una recta, y obtener el diagrama del momento debido a  $R_B$  solamente

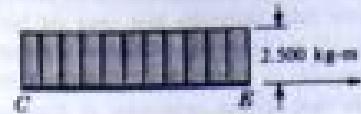


Continuando el recorrido de la viga, consideraremos ahora el par de  $2.500$  kg-m aplicado en el punto  $C$ . Para las secciones situadas a la distancia  $x$  del punto  $A$ , en que  $x$  está a la derecha de  $C$ , en el diagrama del momento flector aparece este par aplicado. Aunque el momento producido por el par es el mismo en todos los puntos del plano, no aparece en el diagrama de momentos flectores hasta que consideramos valores de  $x$  mayores de  $3$  m, porque el momento flector solo tiene en cuenta los momentos de las fuerzas o pares a la izquierda de la sección considerada. Este par aplicado produce la curvatura que se mues-



tra en la figura de la página anterior. De acuerdo con nuestro criterio de signos, constituye un momento positivo. Por tanto, para el par aplicado solo, tenemos

$$M = 2.500 \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 3 < x < 7 \text{ m}$$

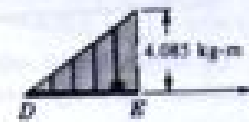


Este valor constante se representa por una recta horizontal, como se ve en la figura adjunta.

Finalmente, en las secciones que están a la derecha del punto D en el cálculo del momento flector aparece la reacción  $R_D$ . Para una de estas secciones, a la distancia  $x$  a la derecha del punto A, el momento flector debido a  $R_D$  sola es

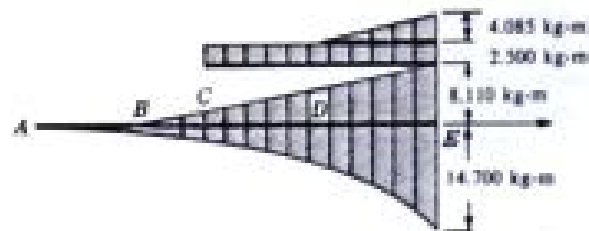
$$M = 2.725(x - 5,50) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 5,50 < x < 7 \text{ m}$$

Que también se representa por una recta. En el punto D, el momento es nulo y, sustituyendo, hallamos que  $M = 4.085 \text{ kg-m}$  en el punto E. Uniendo estos valores extremos por una recta hallamos el diagrama de momentos adjunto, debido a  $R_D$  sola.



Finalmente, se dibujan las cuatro «partes» del diagrama juntas, como se ha hecho a la derecha. Se han desplazado verticalmente las bases horizontales de cada una de las «partes» para evitar el solape entre los diversos diagramas.

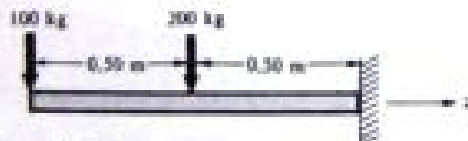
También se podría haber hecho el estudio yendo de derecha a izquierda. El diagrama por partes resultante hubiera tenido un aspecto totalmente diferente del anterior.



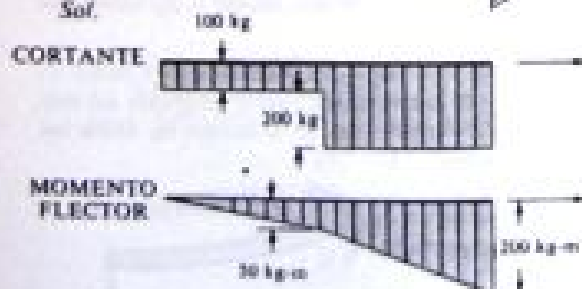
## PROBLEMAS PROPUESTOS

Para las tres vigas en voladizo siguientes, cargadas como en los Problemas 16, 17 y 18, escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector, en un punto cualquiera de la viga. Dibujar también los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

16.



Sol.



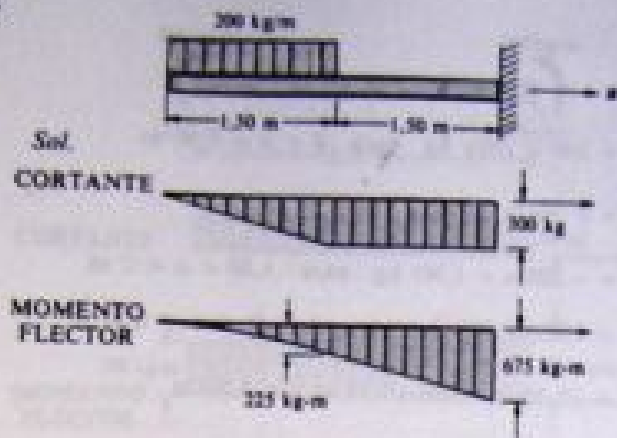
$$T = -100 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0,50 \text{ m}$$

$$T = -300 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0,50 < x < 1 \text{ m}$$

$$M = -100x \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0,50 \text{ m}$$

$$M = -100x - 200(x - 0,50) \text{ kg-m} \\ \text{para} \quad 0,50 < x < 1 \text{ m}$$

17.



Sol.

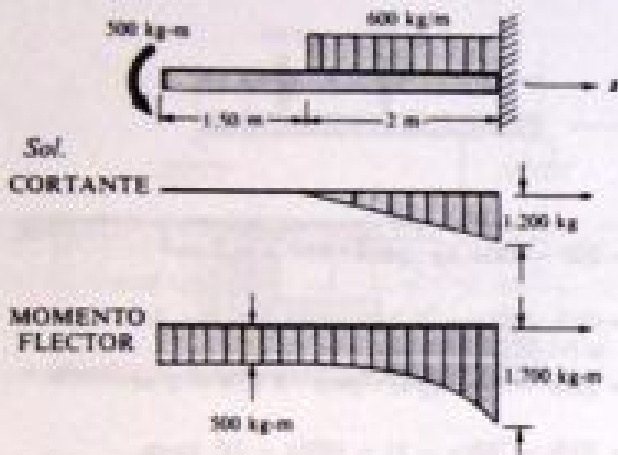
$$T = -200x \text{ kg para } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$T = -300 \text{ kg para } 1,50 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = -100x^2 \text{ kg-m para } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = -300(x - 0,75) \text{ kg-m para } 1,50 < x < 3 \text{ m}$$

18.



Sol.

$$T = 0 \text{ para } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

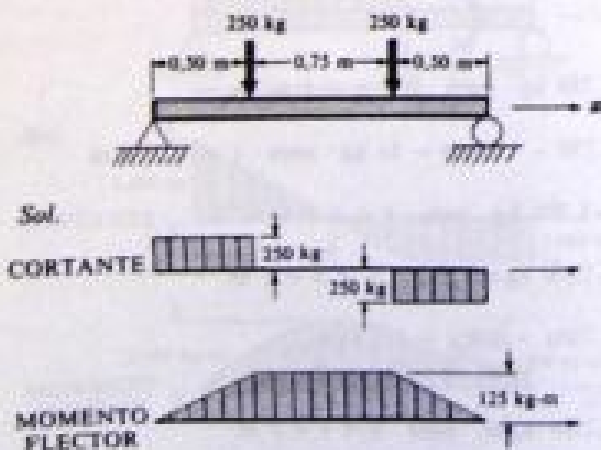
$$T = -600(x - 1,50) \text{ kg para } 1,50 < x < 3,5 \text{ m}$$

$$M = -500 \text{ kg-m para } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = -500 - 300(x - 1,50)^2 \text{ kg-m para } 1,50 < x < 3,50 \text{ m}$$

Para las nueve vigas siguientes de los Problemas 19-27, simplemente apoyadas en los extremos y cargadas como se indica, hallar las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector a lo largo de la viga y dibujar los diagramas correspondientes.

19.



Sol.

$$T = 250 \text{ kg para } 0 < x < 0,50 \text{ m}$$

$$T = 0 \text{ para } 0,50 < x < 1,25 \text{ m}$$

$$T = -250 \text{ kg para } 1,25 < x < 1,75 \text{ m}$$

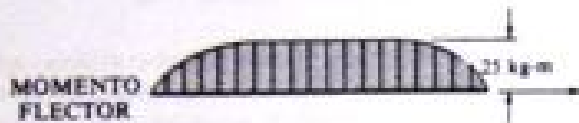
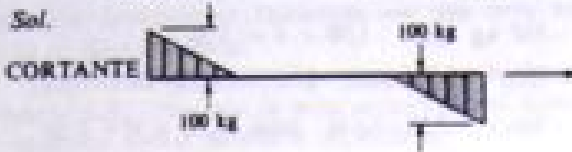
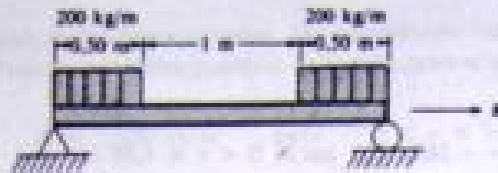
$$M = 250x \text{ kg para } 0 < x < 0,50 \text{ m}$$

$$M = 125 \text{ kg-m para } 0,50 < x < 1,25 \text{ m}$$

$$M = 125 - 250(x - 1,25) \text{ para } 1,25 < x < 1,75 \text{ m}$$



20.



$$T = 100 - 200x \text{ kg para } 0 < x < 0,50 \text{ m}$$

$$T = 0 \text{ para } 0,50 < x < 1,50 \text{ m}$$

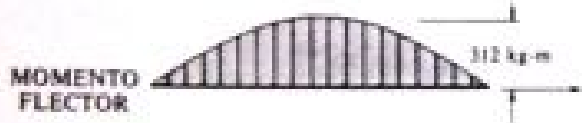
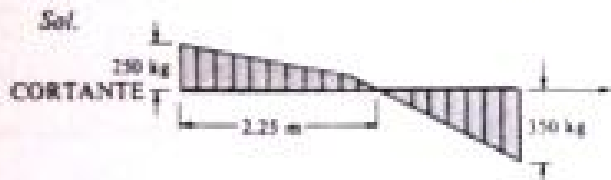
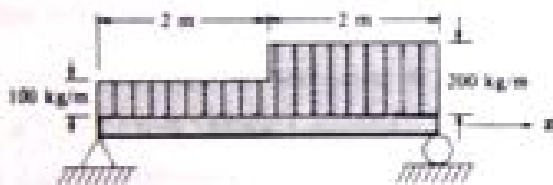
$$T = -200(x - 1,50) \text{ kg para } 1,50 < x < 2 \text{ m}$$

$$M = 100x - 100x^2 \text{ kg-m para } 0 < x < 0,50 \text{ m}$$

$$M = 25 \text{ kg-m para } 0,50 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = 25 - 100(x - 1,50)^2 \text{ kg-m para } 1,50 < x < 2 \text{ m}$$

21.



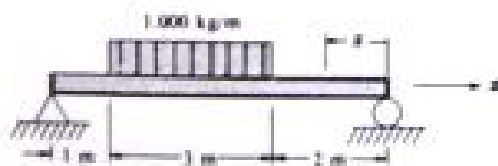
$$T = 200 - 100x \text{ kg para } 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$T = 50 - 200(x - 2) \text{ kg para } 2 < x < 4 \text{ m}$$

$$M = 250x - 50x^2 \text{ kg-m para } 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M = 250x - 200(x - 1) - 100(x - 2)^2 \text{ kg-m para } 2 < x < 4 \text{ m}$$

22.



$$T = 1.750 \text{ kg para } 0 < x < 1 \text{ m}$$

$$T = 1.750 - 1.000(x - 1) \text{ kg para } 1 < x < 4 \text{ m}$$

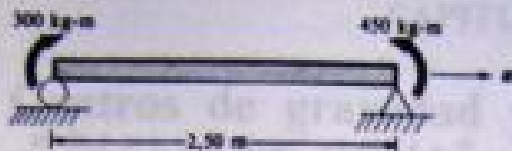
$$T = -1.250 \text{ kg para } 4 < x < 6 \text{ m}$$

$$M = 1.750x \text{ kg-m para } 0 < x < 1 \text{ m}$$

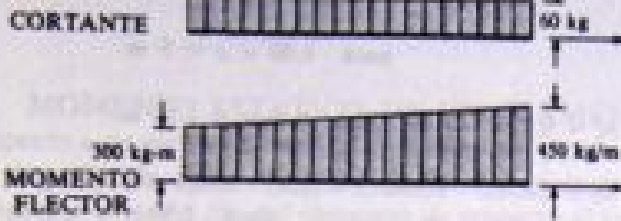
$$M = 1.750x - 500(x - 1)^2 \text{ kg-m para } 1 < x < 4 \text{ m}$$

$$M = 1.250x \text{ kg-m para } 0 < x < 2 \text{ m}$$

23.



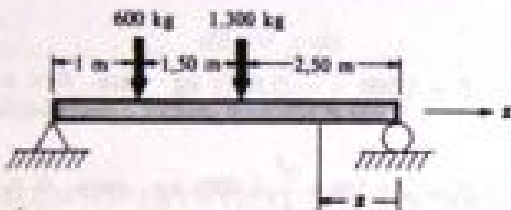
Sol.



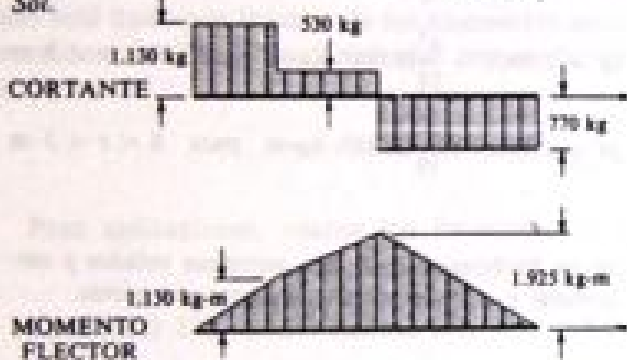
$$T = 60 \text{ kg para } 0 < x < 2,50 \text{ m}$$

$$M = 300 + 60x \text{ kg-m para } 0 < x < 2,50 \text{ m}$$

24.



Sol.



$$T = 1.130 \text{ kg para } 0 < x < 1 \text{ m}$$

$$T = 530 \text{ kg para } 1 < x < 2,50 \text{ m}$$

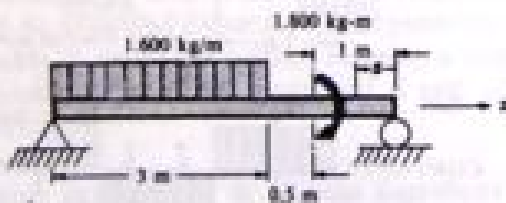
$$T = -770 \text{ kg para } 2,50 < x < 5 \text{ m}$$

$$M = 1.130x \text{ kg-m para } 0 < x < 1 \text{ m}$$

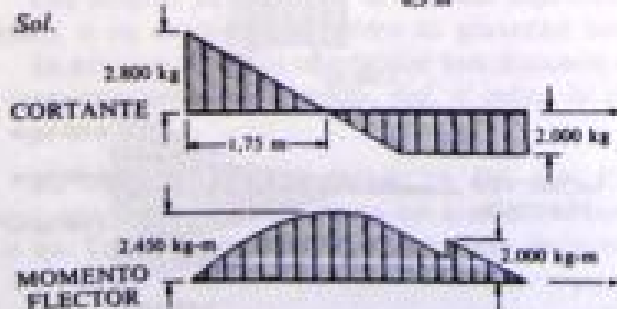
$$M = 1.130x - 600(x - 1) \text{ kg-m para } 1 < x < 2,50 \text{ m}$$

$$M = 770x \text{ kg-m para } 2,50 < x < 5 \text{ m}$$

25.



Sol.



$$T = 2.800 - 1.600x \text{ kg para } 0 < x < 3 \text{ m}$$

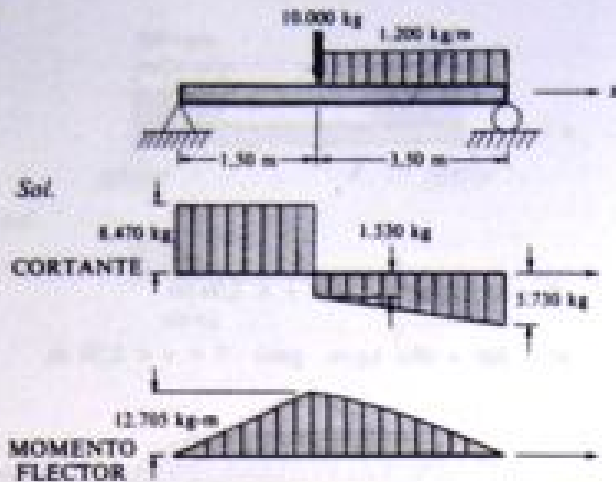
$$T = -2.000 \text{ kg para } 3 < x < 4,50 \text{ m}$$

$$M = 2.800x - 800x^2 \text{ kg-m para } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = 2.800x - 4.800(x - 1,50) \text{ kg-m para } 3 < x < 4,50 \text{ m}$$

$$M = 2.000x \text{ kg-m para } 0 < x < 1$$

26.



$$T = 8,470 \text{ kg para } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$T = 8,470 - 10,000 - 1,200(x - 1,50) \text{ kg}$$

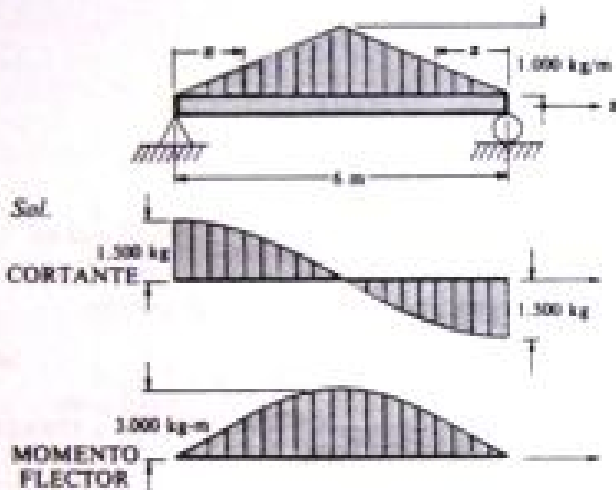
$$\text{para } 1,50 < x < 5 \text{ m}$$

$$M = 8,470x \text{ kg-m para } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = 8,470x - 10,000(x - 1,50) - 600(x - 1,50)^2 \text{ kg-m}$$

$$\text{para } 1,50 < x < 5 \text{ m}$$

27.



$$T = 1,500 - \frac{x^2}{6}(1,000) \text{ kg para } 0 < x < 3 \text{ m}$$

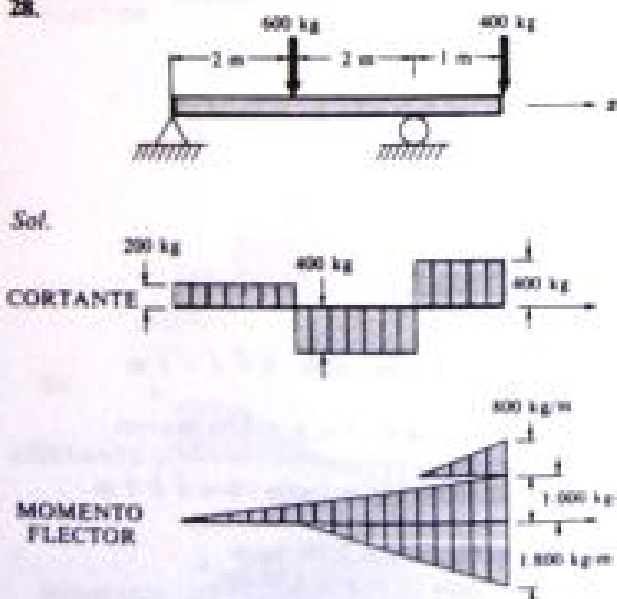
$$T = -1,500 + \frac{x^2}{6}(1,000) \text{ kg para } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = 1,500x - \frac{x^3}{18}(1,000) \text{ kg-m para } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = 1,500x - \frac{x^3}{18}(1,000) \text{ kg-m para } 0 < x < 3 \text{ m}$$

Para las dos vigas simplemente apoyadas siguientes, de los Problemas 28-29, con extremos volados y cargadas como se muestra, dibujar el diagrama de esfuerzo cortante y el de momentos flectores por partes.

28.



29.

